Caos, autosemejanza y el cambio de paradigma en música

Gabriel Pareyón

Investigador del CENIDIM-INBA,
profesor docente en el PMDM-UNAM.

¿Qué pasaría si se tocara simultáneamente toda, absolutamente toda la música de todas las fonotecas disponibles? Es fácil presuponer un ruido ininteligible como resultado, del cual sería imposible extraer, a simple oído, una melodía o un ritmo preciso. No obstante, las teorías de caos y sistemas dinámicos, entre otros nuevos recursos de las matemáticas y la física, sugieren que este tipo de *ruido* no sólo no es trivial para la teoría de la música, sino que sus características podrían involucrar aspectos fundamentales del sistema auditivo humano, así como revelar un *orden oculto* de ciertas tendencias de jerarquización y asociación, en distintas tradiciones musicales. Una teoría sobre estas características podría responder a una variedad de preguntas acerca de los llamados *universales de la música* –aquellos rasgos que aparecen en la gran mayoría de las manifestaciones culturales relacionadas con los mitos y los ritos en torno al sonido, en distintas épocas y latitudes; pero asimismo podría aclarar el tipo de diferencias que hay entre *universales* y *particulares*. Este texto ofrece una primera aproximación a estas teorías, desde la perspectiva de la musicología.

What would happen if absolutely all the music from the sound libraries could be played at the same time? We may suppose as consequence an unintelligible noise, impossible to process as a melody pattern or a precise rhythm. However, chaos theory and dynamical systems, among other new resources from mathematics and physics, suggest this type of noise is not trivial to music theory, but its features could be involving essential aspects of the human hearing system, besides to reveal a hidden order *of certain tendencies of hierarchy and association in different musical traditions. A mathematical theory about these notions could provide answers to many questions about the so-called* universals of music *–the common aspects that appear in most of cultural manifestations related to the human myths and rites of sound interpretation, in different times and latitudes. Additionally, this perspective could contribute to make clear the kind of structural differences between* universals *and* particulars *of music. This text is a first approach to this theories, from a musicological viewpoint.*

Introducción

La bibliografía publicada en los últimos veinte años, tanto desde la perspectiva físico-matemática[1] como desde una perspectiva específicamente musicológica,[2] sugiere un cambio de paradigma en la teoría de la

[1] Kenneth J. Hsü & Andrew Hsü, “Fractal geometry of music”, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, 1990, vol. 87, n. 3; pp. 938–941; Kenneth J. Hsü & Andrew Hsü, “Self-Similarity of the “1/*f* Noise” Called Music”, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, 1991, vol. 88, n. 8; pp. 3507–3509; Kenneth J. Hsü, “Fractal Geometry of Music: From Birdsongs to Bach” in (A.J. Crilly, R.A. Earnshaw, H. Jones, eds.) *Applications of Fractals and Chaos: The Shape of Things*, Berlín, Springer-Verlag, 1993, pp. 21–39; Edward Large y John F. Kolen, “Resonance and the Perception of Musical Meter” en N. Griffith & P.M. Todd, eds., *Musical Networks: Parallel Distributed Perception and Performance*, Cambridge, Mass., The MIT Press, 1999, pp. 65–96.1999; Maxence Bigerelle y Alain Iost, “Fractal dimension and classification of music”, *Chaos, Solitons & Fractals*, 2000, vol. 11, n. 14, pp. 2179–2192; Jan Beran, *Statistics in Musicology*, Boca Raton, Fl., Chapman & Hall/CRC, 2004;

música. Este cambio está directamente relacionado con los nuevos enfoques teórico-prácticos de los *sistemas dinámicos* y el estudio de los fenómenos de *caos* y *autosemejanza* que brevemente se describen a continuación.

Según este nuevo enfoque, los sistemas tonales particulares dejan de serlo para entenderse como familias de relaciones numérico-geométricas generalizadas, que constituyen familias de familias de familias de sistemas autoorganizados. Es crucial buscar la claridad en este contexto: no se anuncia un "nuevo" sistema de representación musical, con "nuevos" números y figuras geométricas –pues, en última instancia, los números y las figuras solamente serían *presentaciones* o *representaciones* del propio sistema. El paradigma en mención consiste –más bien– en aplicar conceptos y métodos radicalmente distintos a los tradicionales, para el análisis, síntesis y elaboración y correlación de conjuntos de sistemas musicales ya existentes, de manera que sea posible su reinterpretación en el contexto de los *sistemas dinámicos*. Algunos de estos conceptos y métodos –probablemente los más conocidos en el ámbito especializado– son los que se señalan en cada sección de este trabajo.

Nociones básicas de caos

La idea de creación del universo a partir de la "nada" o del "desorden absoluto" es un mito común a muchas culturas. La palabra griega *χάος* (transliteración al latín, *chaos*) era utilizada antiguamente para expresar ese estado inicial del cosmos, en que se suponía reinaba el *πρώτιστα χάος* o "desorden primigenio".[3] Actualmente, en un contexto coloquial, la palabra *caos* se usa para denotar *falta de orden, regularidad* o *arreglo simétrico*. Este uso, sin embargo, es poco preciso para un estudio minucioso de los "fenómenos cambiantes" –objeto de estudio de los sistemas dinámicos– como la música, pues la "falta de orden" puede ser un efecto superficial de la intuición inmediata, y no el estado generalizado de los procesos en transformación.

Atin Das y Pritha Das, "Fractal Analysis of Different Eastern and Western Musical instruments", *Fractals*, 2006, vol. 14, n. 3; pp. 165–170; Edward W. Large, "A Dynamical Systems Approach to Musical Tonality" (R. Huys & V.K. Jirsa, eds.), *Nonlinear Dynamics in Human Behavior*, SCI 328, Berlín / Heidelberg, Springer-Verlag, 2010, pp. 193–211.

[2] Alexander A. Koblyakov, "Semantic Aspects of Self-Similarity in Music", *Symmetry: Culture and Science – Quarterly of the International Society for the Interdisciplinary Study of Symmetry*, 1995, vol. 2, pp. 297–300.1995; Norman Carey y David Clampitt, "Self-Similar Pitch Structures, Their Duals, and Rhythmic Analogues", *Perspectives of New Music*, 1996, vol. 34, n. 2, pp. 62–87; Guerino Mazzola, *The Topos of Music: Geometric Logic of Concepts, Theory, and Performance*, 2 vols, Basilea, Birkhäuser Verlag, 2002; David J. Benson, *Music: A Mathematical Offering*, Cambridge, Cambridge University Press, 2007; Gabriel Pareyón, "The Ecologic Foundations of Stylistics in Music and in Language" en (A. Kyriakidou & J. Yannacopoulou, eds.) *Proceedings of the 2nd International Conference for PhD Music Students*, Thessaloniki, Greece, Aristotle University/University of Edinburgh, 2009b, pp. 126–133; Gabriel Pareyón, *On Musical Self-Similarity: Intersemiosis as Synecdoche and Analogy*, International School of Semiotics, Acta Semiotica Fennica 39 (Approaches to Musical Semiotics; 13), Helsinki / Imatra, 2011.

[3] *Cf.* Aristóteles, *Metafísica*, 1091, b6.

Un uso más exacto de la palabra *caos* se asocia, en cambio, a la evolución determinista que pueda resultar en una *dinámica caótica*; por ejemplo, como parte de un proceso musical. Así, el compositor Mauricio Kagel (1931–2008)[4] intuye la relevancia estética de "planear el caos". Esta noción de caos se opone a la de *aleatoriedad* (del lat. *alea*, suerte, estado fortuito de las cosas), en que no es posible establecer las bases de predicción para ningún estado de un fenómeno observable. Es muy importante, entonces, tener en mente la estrecha relación del caos con el determinismo y la predictibilidad, por contraste con la asociación de aleatoriedad e indeterminismo.[5]

Para el músico especializado, aun con modesta competencia en matemáticas, es fácil percibir la diferencia entre caos determinista y aleatoriedad indeterminista, en los siguientes términos: en un *tutti* orquestal escrito en una partitura con "todos" los detalles y precisiones posibles para obtener un máximo de control en el efecto conjunto predecible, tocando todos y cada uno de los músicos *a tutta forza*, en un mismo momento, en el registro más potente de los instrumentos y con figuras rítmicas exactas a un tempo veloz bajo control, el efecto último se parece al caos determinista. En cambio, suponiendo que otro ejemplo de *tutti* orquestal está sugerido en una partitura con indicaciones de intensidad y velocidad en un margen de excesiva ambigüedad de alturas y duraciones, sin más información, el resultado será parecido al caos aleatorio –quizás con músicos tocando grupos de sonidos con la mayor discrepancia, y algunos incluso tocando restos de la última obra estudiada o de su obra favorita en ese momento. Esta disparidad de resultados no es trivial para la musicología, pues tanto el caos como el ruido se encuentran en cierta medida en todas las formas de música, por la razón de que en la música siempre es posible referirse a un control (*determinismo*) o falta de control (*indeterminismo*) en cualquiera de sus parámetros.[6] Esta dialéctica también involucra criterios de análisis: el *análisis subjetivo*, *e.g.* en un ensayo o crítica sobre cierto repertorio; por oposición con el *análisis sistematizado*, *e.g.* en la interpretación exacta de un conjunto de datos estadísticos, en un discurso que busca la predicción o la síntesis de un grupo de comportamientos. Algo similar puede establecerse respecto de métodos de

[4] *vid.* Alfonso Padilla [Conversación con Mauricio Kagel], *Araucaria*, n. 29, Santiago de Chile, 1984, p. 121.

[5] La adaptación de este concepto de "caos" en la ciencia moderna se debe al físico meteorólogo Edward Lorenz (1917–2008), quien lo introdujo en el contexto de la predicción meteorológica ("Deterministic nonperiodic flow", 1963), y más tarde lo popularizó en su célebre artículo "Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil Set Off a Tornado in Texas?" (1972). Véase Edward N. Lorenz, "Deterministic nonperiodic flow", *Journal of the Atmospheric Sciences* 20, 1963, pp. 130-141 y Edward N. Lorenz, "Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil Set Off a Tornado in Texas?" *American Association for the Advancement of Science*, 139th Meeting, 1972.

[6] Irónicamente, bajo un criterio musical convencional, la idea de "caos" suele asociarse al ruido como sistema de frecuencias en que sus relaciones inherentes pueden ser muy inestables e inclusive altamente no-correlacionadas, según ocurre en una aproximación al ruido $1/f^0$ o *ruido blanco*; efecto que, no obstante, puede producirse por medio de un algoritmo determinista. En este caso, el concepto "algoritmo determinista" se refiere a un conjunto controlado de instrucciones precisas para la generación de ruido.

composición musical, pensando en la síntesis como inversión del análisis.[7] Conviene, sin embargo, buscar una noción precisa y operativa de caos determinista, de acuerdo con lo que se sugiere en seguida.

La idea matemática de caos determinista

La definición matemática más simple de *caos* es inherente a la de *sistema caótico*. Esto se entiende porque no puede haber caos en un punto o un objeto, en sí mismo. Tiene que haber un grupo de relaciones entre un conjunto de puntos (*e.g.* característicos de una función) o entre un conjunto de objetos (*e.g.* en un modelo físico), para que ese grupo de relaciones sea susceptible de caos.

Feinberg define el concepto de caos como "un tipo de comportamiento de los sistemas físicos, en los que su evolución es impredecible debido a su dependencia y gran sensibilidad respecto de pequeños cambios en las condiciones iniciales de esos sistemas".[8] Esto implica que, aun cuando unas condiciones generales puedan establecerse para el primer período de un proceso dinámico, la *diversidad* de factores que influyen en su evolución –una diversidad que tiende a multiplicarse– hace que a mediano o largo plazo las predicciones sobre su comportamiento sean difíciles de determinar debido a la extrema sensibilidad inicial del proceso mismo. Otro signo necesario para que haya caos en un sistema, es que éste presente una gran variedad de comportamientos diversos. El ejemplo dado arriba, de una orquesta tocando con la mayor diversidad individual posible, también es un buen ejemplo asociado a esta condición.

Finalmente, la tercera condición del caos determinista, es que el "desorden" del sistema sea suficiente como para que la variedad de comportamientos caóticos individuales, presente una tendencia a ocurrir en todas las regiones del comportamiento caótico generalizado: como si, en el mismo ejemplo de la orquesta, hubiese grandes probabilidades de que el tipo de "desorden" de lo que está tocando uno de los violines, se presente de manera análoga en una flauta o en una percusión, o en subconjuntos de las secciones instrumentales, al mismo tiempo que en las secciones y en el total de la orquesta. Esta "multiescalaridad" del caos (porque se presenta simultáneamente en varios niveles o tamaños de la muestra; no porque se trate específicamente de *escalas tonales*) es el requisito fundamental de la *autosemejanza*, concepto que se define más abajo.

El concepto de caos se asocia con procesos musicales que son estables en un principio, volviéndose inestables conforme hay un distanciamiento del origen de las relaciones intrínsecas del proceso mismo. La emulación de este tipo de fenómenos es de gran interés, lo mismo para el estudio de

[7] Según esta dialéctica, la operación inversa de la composición, es el análisis.
[8] Gerald Feinberg, *Solid Clues*, Nueva York, Touchstone Books, 1985, p. 264.

la autosemejanza acústica –*e.g.* en las turbulencias que forma el soplo en un instrumento de aliento–, que para la síntesis compositiva y el análisis estilístico.[9] En este contexto, el concepto de caos se involucra con la generación de procesos estocásticos, como los recién descritos, así como con la predictibilidad en la correlación de los sistemas musicales globales y locales.

Un modelo de caos, adecuado para el estudio de la correlación entre sistemas musicales globales y locales, puede ser extremadamente útil para –por ejemplo– describir las variaciones estilísticas de un repertorio, como si se tratase del estudio de un *tema y sus variaciones*. En este sentido, los conceptos matemáticos de caos y sistema dinámico, con todas sus herramientas asociadas, favorecen el análisis de grandes masas de información, bajo la premisa de que lo que ocurre en pequeñas escalas, se presenta, análogamente, en grandes escalas. Esta analogía permite sugerir que hay unas leyes y comportamientos generales para la música, tanto en sus aspectos físicos comunes, como en sus cambios individuales y colectivos, orientados por procesos culturales.

Autorreferencia: motor de la autosemejanza

La *autosemejanza* –concepto abstracto tomado de las matemáticas– se está convirtiendo en una palabra clave en la musicología sistemática. Usualmente, el término se refiere a una repetición característica *multiescalar* (*i.e.* en varios tamaños de las muestras estadísticas), y es valorado como signo de "coherencia" en la música. En sí misma, la noción de coherencia está estrechamente relacionada con unas propiedades universales de la música, independientemente de cualquier tradición o período histórico. Estas propiedades son (al menos): *simetría, similitud, repetición* y *proporción*. Casi todos los aspectos de la música, incluyendo las relaciones intersubjetivas de armonía, métrica, ritmo, melodía, timbre y textura, dependen de criterios de simetría y proporción, así como de la comparación entre estas relaciones, esenciales para la formación de sentido musical. Estos criterios necesariamente demandan nociones específicas de *semejanza*, cuyo reverso analítico es llamado *diferencia*. Finalmente, es muy difícil encontrar un ejemplo musical evitando cualquier tipo de repetición; pues, de alguna manera, la música es una repetición de sonidos, de acuerdo con las convenciones de cierta tradición.

La autosemejanza capta muchos aspectos centrales de la música, porque, precisamente, coordina los criterios de similitud, repetición y simetría. Por otra parte, la autosemejanza conduce otros conceptos complementarios, que también suelen ser identificados como *universales*, a saber: *analogía* (muy

[9] Maxence Bigerelle y Alain Iost, "Fractal dimension and classification of music", *Chaos, Solitons & Fractals*, vol. 11, n. 14, 2000, pp. 2179–2192.

relacionada con la idea de *proporción*) y *recursión* (concepto que los físicos conocen bien por su significado en los *patrones emergentes*, en la iteración de funciones).

En principio –por la recursión de un proceso generativo y por la autorreferencia del sistema que le corresponde–, la autosemejanza se relaciona con una variedad de procesos dinámicos, a través de un "anidamiento" de orden dentro del caos; o si se quiere, de una continua bifurcación de comportamientos ordenados que, como proceso masivo, intuitivamente no corresponde a una imagen de orden obvio, sino a una de caos. ¿Cómo es posible, en este escenario, que a partir de sí misma la autorreferencia produzca "complejidad"? Aparentemente, la autorreferencia de un sistema simple no debería producir complejidad (por ejemplo, la simple adición 0 + 1 = 1); no obstante, si el axioma inicial "contiene" la semilla de unas relaciones simples emergentes que a la hora de iterarse producen "algo diferente", entonces la autorreferencia de un sistema simple puede arrojar relaciones progresivamente más elaboradas. Uno de los mejores ejemplos en este caso, es la llamada sucesión de Fibonacci (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144…). Esta sucesión numérica no hace otra cosa que sumar un término al término que le precede. Sin embargo, las propiedades de la sucesión son progresivamente elaboradas; de hecho la división de un término de la sucesión con su predecesor se acerca cada vez más a la *proporción áurea*–entre más grande sea el número de la sucesión.

En los últimos treinta o cuarenta años la musicología acumula evidencias para conjeturar que la proporción áurea –y en cierto modo la sucesión de Fibonacci– son un atributo universal de la música: se le encuentra en numerosas obras de la escuela impresionista;[10] en piezas de la tradición gamelán de Indonesia;[11] en la proporción usual de la *zanza*, en el ritmo *gàdà*, de África Central;[12] o en la estructura típica de algunos cantos del pueblo k'miai, del noroeste de México.[13] Evidentemente, la proporción áurea no se encuentra en sistemas de autorreferencia que no se basan en la sucesión de Fibonacci o en algún arreglo geométrico análogo; no se encuentra, por ejemplo, en los cuartetos de Joseph Haydn.[14] No obstante, en una enorme variedad de casos específicos es menester observar cuáles son las relaciones fundamentales de autorreferencia, que validan un sistema simbólico para producir su propia lógica

---

[10] Roy Howat, "Debussy, Ravel and Bartók: Towards Some New Concepts of Form", *Music & Letters*, vol. 58, n. 3, 1977, pp. 285–293 y Roy Howat "Bartok, Lendvai and the Principles of Proportional Analysis", *Music Analysis*, vol. 2, n. 1, 1983, pp. 69–95.

[11] David Canright, "Fibonacci Gamelan rhythms", *Journal of the Just Intonation Network*, vol. 6, no. 4, 1990, pp. 4–12.

[12] Simha Arom, *African Polyphony and Polyrhythm: Musical Structure and Methodology*, Paris, Éditions de la Maison des Sciences de l'Homme, y Cambridge, Cambridge University Press, 1991, p. 627.

[13] Pareyón, *On Musical Self-Similarity: Intersemiosis as Synecdoche and Analogy*, International School of Semiotics, Acta Semiotica Fennica 39 (Approaches to Musical Semiotics; 13), Helsinki / Imatra, 2011, pp. 383–386.

[14] *vid.* Robert W. Demaree, "The Structural Proportions of the Haydn Quartets", Tesis doctoral, Bloomington, Indiana University, 1973, p. 19.

estructural: cada sistema de autorreferencia –entre los cuales la sucesión de Fibonacci es uno de los más usuales, pero no el único– crea sus propias formas de autosemejanza.

Un hallazgo de la lingüística

De acuerdo con la ley de Zipf –una ley empírica y probabilística que señala que el lenguaje verbal humano se aglutina en bloques de uso, en un modo análogo a la serie armónica– las palabras que miden aproximadamente el doble de largo que las "palabras largas", son cuatro veces más raras que éstas en el repertorio verbal. Suponiendo que tal repertorio sea un arreglo caótico, potencialmente infinito e incontable de combinaciones fonéticas, a partir de una colección finita (*i.e.* alfabética), el total de sus arreglos es comparable a un conjunto de Cantor.[15] Por lo tanto, el lenguaje en cuestión es necesariamente autosemejante, es autoestructurado –por jerarquías de palabras, y tiene dimensión fractal.[16] Esta exposición se basa en la sugerencia de que la música sigue, también en un modo análogo, un mismo principio probabilístico, en todos sus vectores.

La descripción de la ley de Zipf hecha por John R. Pierce,[17] y que se centra en la idea de "eficacia para enfatizar ciertas elecciones sacrificando otras", tiene un significado especial para la música, considerando que buena parte de las estrategias de coherencia musical se basan en esa misma clase de eficacia. De hecho, la forma de característica de la *ecuación de Zipf*,

$$1 \sim 1,\ 2 \sim {}^{1}/_{2},\ 3 \sim {}^{1}/_{3},\ 4 \sim {}^{1}/_{4},\ 5 \sim {}^{1}/_{5}\ldots$$

constituye una secuencia autorreferente, comparable a la división alícuota en un sistema acústico, de una frecuencia fundamental y sus armónicos naturales. También puede interpretarse como secuencia convergente con autosemejanza estadística, en un sistema autoestructurante comparable a un *sistema de Lindenmayer* o sistema-L (*vid. Adenda aclaratoria*, al final de este texto).[18] Aunque, por el hecho de obedecer una sucesión de números naturales consecutivos, este tipo de series aparecen en una profusión de casos,

---

[15] El conjunto de Cantor, también conocido como "conjunto sin su tercio medio", es un conjunto fractal del intervalo real [0, 1], y se obtiene con la remoción de su tercera parte media, quedándose con las dos terceras partes de sus extremos, replicándose a escala, *ad infinitum*. Es, entonces, el conjunto de puntos de intervalo [0, 1], cuyas expansiones ternarias no contienen 1.

[16] O sea, una dimensión fracturada, no euclidiana, comúnmente asociada a la dimensión de Hausdorff-Besicovitch, utilizada para medir un espacio topológico.

[17] John Robinson Pierce, *Symbols, Signals and Noise*, Nueva York, Harper, 1961, pp. 238–249.

[18] Los sistemas-L fueron diseñados originalmente para modelar en la computadora, la estructura celular de las plantas y emular sus procesos de crecimiento. La obra de Lindenmayer (1968) fue continuada por Prusinkiewicz, fundador del Taller Internacional de Modelación Funcional y Estructural de Plantas (*International Workshop on Functional-Structural Plant Modeling*), quien, además, en 1986 publicó la primera formalización de los sistemas-L como recurso de una gramática musical.

lo interesante para la música es que hay una tendencia jerárquica en el uso mismo de la serie. $1 \sim 1$ se refiere a una influencia correlativa sobre los demás términos; $2 \sim {}^{1}/_{2}$ se refiere a un rango subsecuente; $3 \sim {}^{1}/_{3}$ a un siguiente rango subsecuente, y así sucesivamente, elaborando una estructura autosemejante. Esto implica que, a un conjunto de *acordes básicos*, en un sistema musical tonal, seguirá –como jerarquía gramatical– un primer conjunto de *acordes subordinados*. Es posible –y de hecho, frecuente– que en seguida se encuentre un subconjunto terciario, y en seguida una cuarta jerarquía, continuando así, probablemente. Una variedad de casos puede subsumirse a este orden, o bien, continuar una sucesión de ramificaciones más o menos estructuradas según la "ley del menor esfuerzo" –como se conoce en biología a la ley de Zipf. La tendencia generalizada, bajo este esquema, es que hay una proporción relativamente constante entre jerarquías, en sistemas de símbolos. Sobresale, en este sentido, que esta ley no se limita a relaciones entre acordes, sino entre ontologías (objetos) y reglas (gramáticas) en una vastedad de casos: la ley de Zipf puede cumplirse en forma generalizada, lo mismo para la letra de una canción, que para los acordes de una tradición pianística, que para los ritmos de un repertorio, o incluso para las texturas y los timbres instrumentales.

Consecuentemente, cabe hacer la siguiente comparación entre lenguaje verbal y música: si un individuo cuya lengua materna es el castellano, aprende las primeras cien palabras más frecuentes del idioma inglés –en el contexto adecuado–, junto con sus cincuenta reglas de uso más frecuentes, tal individuo no tendrá demasiados problemas para comunicarse en un inglés básico. Entonces "hablar un idioma" no significa abarcar el total de sus colecciones de símbolos, sino *inferir* significados a partir de un primer sistema (un sistema autoestructurante). Esta relación –demasiado obvia en un principio– también aplica para la música, cuando, por ejemplo, un individuo aprende a tocar una pieza instrumental: luego de tocarla correctamente (*i.e.* satisfaciendo una convención), aprenderá con menor dificultad una segunda pieza y luego una tercera, hasta dominar un repertorio básico. Este aprendizaje "exponencial", cada vez con mayor información, es posible, no por la relativa sencillez o dificultad del acceso a dicha información, sino más bien porque, una vez aprendido un repertorio básico de ontologías y reglas, es posible deducir el funcionamiento generalizado de un lenguaje. Evidentemente, en cada ciclo de aprendizaje podrán introducirse *segundas categorías* de valores menos frecuentes, pero no será necesario aprender todas las categorías, ni la mayoría de ellas, para "hablar inglés", ni para "tocar el piano". Basta con aprender "las bases" y darle al aprendizaje un proceso de autosimplificación, proyectando los conocimientos adquiridos en dichas bases, sobre los conocimientos menos asegurados; de manera que "lo más conocido" se impone relativamente –y mientras no haya un conocimiento más perfeccionado– sobre "lo poco conocido". Esta forma de pensamiento y actuación recibe el nombre de *inferencia lógica*, la cual permea de manera muy semejante la música y el lenguaje en sus aspectos organizativos más comunes.

Pero, entonces, si el lenguaje es un conjunto de ontologías, reglas y prácticas, formado de conjuntos menores (subconjuntos) de ontologías, reglas y prácticas, relativamente dependientes del conjunto mayor; y sucesivamente, los subconjuntos están formados de analogías todavía menores –o sea, conjuntos de conjuntos de conjuntos semejantes entre sí–, el cuadro último de estas relaciones se aproxima a lo que Hřebíček (1994, 1997) identifica como *autosemejanza del lenguaje*.[19]

En los preceptos más generales de la música, la ley de Zipf parece cumplirse, incluyendo la armonía funcional, en que "unas pocas" relaciones básicas prevalecen a lo largo del sistema, mientras que "algunas" relaciones secundarias prevalecen sólo en algunos casos, y el grueso del resto de las relaciones posibles prácticamente son eliminadas o aparecen con muy poca frecuencia. Esta relación también se encuentra en la configuración de las escalas en los sistemas armónico-melódicos, en que hay una tendencia a formar estructuras funcionales con dos tipos de pasos entre los elementos de la escala; con tres tipos de pasos –con menor frecuencia; y con cuatro tipos de pasos –aún con menor frecuencia. Norman Carey concluye que "por razones cognitivas, pero también por razones estructurales, es muy poco probable que encontremos escalas musicalmente útiles, con cuatro o más tamaños de pasos".[20] En particular, la generalidad de los aspectos constructivos de la música puede medirse con aplicaciones de la ley de Zipf,[21] en tanto que unas mismas *leyes de potencia* y unas reglas generalizadas de *buena formación*, conducen la mayor parte de las relaciones funcionales y estructurales de la música,[22] según se explica a continuación.

Leyes de potencia

Con un razonamiento que ilumina el significado de las relaciones generalizadas de autosemejanza en la música, Carlos Chávez considera que hay patrones universales de simetría y repetición, independientemente de la escala en que se observen: "Los humanos somos parte del universo, que se

---

[19] Luděk Hřebíček, "Fractals in Language", *Journal of Quantitative Linguistics*, 1994, vol. 1, n. 1; pp. 82–86; Luděk Hřebíček, "Persistence and Other Aspects of Sentence-Length Series", *Journal of Quantitative Linguistics*, 1997, vol. 4, n. 1–3, pp. 103–109. Para una descripción más general de esta noción, *vid.* Gabriel Pareyón, "A Fractal Conjecture of Language: Proposal for a Cognitive Frame of Linguistics" en E. Tarasti, ed., *Communication: Understanding, Misunderstanding. Proceedings of the 9th Congress of the IASS-AIS*, Helsinki / Imatra, 2009a, vol. 3, pp. 1300–1306.
[20] Carey, 2007, p. 97.
[21] *cf.* Daugherty *et al.*, "Searching for Beauty in Music: Applications of Zipf's Law in MIDI-Encoded Music", 2003 http://www.cs.cofc.edu/~manaris/ZipfMIDI/ (consulta: jun.2009).
[22] *cf.* Fred Lerdahl & Ray Jackendoff, *A Generative Theory of Tonal Music*, The MIT Press, Cambridge, Mass.,1983; Norman Carey & David Clampitt, "Self-Similar Pitch Structures, Their Duals, and Rhythmic Analogues", *Perspectives of New Music*, 1996, vol. 34, n. 2, pp. 62–87.

rige por las mismas leyes generales que gobiernan el espectro lumínico, la resonancia acústica, los principios de la biología, capilaridad, ósmosis, los fenómenos cíclicos. Hay un parentesco primario entre ellos y nosotros".[23] Esto es particularmente verificable a través de las *leyes de potencia*.

Una ley de potencia es un tipo especial de relación matemática entre dos cantidades. En términos estadísticos, bajo cierta ley de potencia, si esas cantidades corresponden a una *variable* y su *frecuencia*, esta última decrece según un exponente mientras la variable aumenta. Por simple que sea esta relación, su margen de predicción física se apega mucho a la experimentación. Por ejemplo: en una región sísmica, un terremoto de doble intensidad (= 2) es cuatro veces más improbable que uno de intensidad media (= 1). Cámbiese el tipo de fenómeno: una inundación, una ola inusualmente grande, una jerarquía mayor en un léxico verbal, una regla de composición musical… No es difícil encontrar en los sistemas dinámicos reales, ejemplos de *grandes jerarquías* poco probables que, sin embargo, cuando ocurren, afectan drásticamente al sistema en su conjunto, generando "réplicas" cada vez menores, pero –también exponencialmente– con mayor probabilidad de repetición. Recíprocamente, también se encuentran muchos sistemas que establecen un "orden" a través de tendencias hacia *grandes jerarquías* muy probables que, sin embargo, dependen de categorías menores cada vez menos probables, las cuales *completan* un sistema –por ejemplo, un conjunto coherente de símbolos, según lo que sugiere la ley de Zipf para el lenguaje verbal.[24]

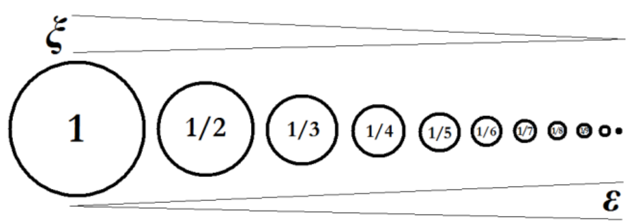

Fig. 1. Representación de categorías sucesivas, análogas a la *distribución de Zipf* (en lingüística) y a la *serie armónica* (en música y física). Los signos "mayor que" y "menor que", a lo largo de la sucesión, sugieren dos posibles tendencias del sistema: la primera hacia una mayor frecuencia de jerarquías cada vez menores, aumentando la cantidad de ruido en el sistema (indicado con la letra ε, de "entropía"); y otro, tendiente a una mayor frecuencia de jerarquías mayores, que aumentan las relaciones entre las primeras categorías (indicado con la letra ξ, "orden"). Un sistema "rico" en información implica un equilibrio entre ambas tendencias, generando un *sistema de información* (C.E. Shannon, 1948). Según esta noción, "información baja" significa alta predictibilidad (como tendencia hacia ξ), y en consecuencia, alta predictibilidad resulta en "baja información" (tendencia hacia ε).

23 Explícitamente, Chávez (*loc. cit.*) hace esta afirmación en el contexto de la simetría y la repetición musicales. *Vid.* Carlos Chávez, *Musical Thought*, Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1961, p. 38.

24 Esta reciprocidad entre jerarquías simbólicas mayores (significativas) y menores (redundantes) es el concepto fundamental de la *teoría de la información* elaborada por Claude E. Shannon (1916–2001).

¿Pero, por qué motivo la ley de Zipf resulta ser tan persuasiva en el ámbito de la teoría de la música, y en el de los "sistemas estéticos",[25] en general? La respuesta a esta pregunta está vinculada a la ley de Weber-Fechner, una ley de potencia que señala que el menor cambio discernible en la magnitud de un estímulo fisiológico, es proporcional a la magnitud de propio estímulo.[26] Esto significa que –desde una conceptuación estrictamente perceptiva (*i.e.* estética)– hay una coordinación entre "economía de recepción" y "gasto de reacción". Tanto la ley de Zipf como la ley de Weber-Fechner son interpretaciones particulares de leyes de potencia generales que involucran los sistemas musicales, lo mismo como procesos de elaboración biológicos y sociales, que como procesos psicológicos de percepción y transformación.

Como ley de potencia, la ley de Zipf –o sus analogías musicales– se encuentra en una enorme variedad de repertorios simbólicos. Beran destaca esta relación en el caso específico de la música tonal occidental: "En la música basada en la escala cromática, las alturas usualmente [salvo en el serialismo de Webern] no están igualmente distribuidas. Las alturas que pertenecen a la escala principal tienen más probabilidades de aparecer, y junto con éstas, también hay ciertos intervalos que son preferidos."[27] Lerdahl y Jackendoff[28] distinguen, sin embargo, entre tendencias y preferencias como procesos de regulación, bajo los conceptos de *buena formación* y *reglas de preferencia*, respectivamente. En particular, el principio de buena formación, estrechamente relacionado con las funciones de una gramática generativa,[29] elabora reglas de consistencia cuyo uso recurrente produce estructuras autosemejantes en el lenguaje verbal y en la música (incluso en el serialismo de Webern).

La ecuación de Zipf también tiene empleo en la síntesis, y no sólo en el análisis musical. Hiller propone, así, una adaptación estructuralista para elaborar un "flujo de algoritmos" que generan secuencias musicales.[30] Esta noción procede de Voss y Clarke (1975), a quienes se debe la idea de correlacionar la sensación subjetiva de la música, generalizada como sistema psicoacústico, con la distribución típica del ruido fraccionario $1/f$ (donde 1 representa unidad de energía espectral en correlación con f, que representa la frecuencia de un proceso variable).[31] Estos autores comprueban que las fluctuaciones de altura y amplitud en la música también tienden a una distribución estadística de Zipf. Usando esta distribución como principio computacional, Voss y Clarke produjeron un repertorio de piezas con "cualidades musicales", concluyendo que "La sofisticación de esta "música" sobrepasa por

[25] Abraham Moles, *Théorie de l'information et perception esthétique*, Flammarion, París 1958, p. 54.
[26] *cf.* Abraham Moles, "The characterization of sound objects by use of the level recorder in musical acoustics", *Acustica: International Journal of Acoustics*, 1954, vol. 4, n. 1, pp. 241–244.
[27] Jan Beran, *Statistics in Musicology*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, Fl., 2004, p. 64.
[28] Lerdahl y Jackendoff, *op. cit.*, p. 308.
[29] *cf.* Noam Chomsky, *Studies on Semantics in Generative Grammar*, Mouton, La Haya, 1972.
[30] Lejaren A. Hiller "Composing with Computers: A Progress Report", *Computer Music Journal*, 1981, vol. 5, n. 4; pp. 12–14.
[31] Richard Voss & John Clarke "$1/f$ Noise in Music and Speech", *Nature*, 1975, vol. 258, n. 5533; pp. 317–318.

mucho lo que se puede esperar de un simple algoritmo, haciendo pensar que un *ruido* $1/f$ –¿quizás el ruido en las membranas nerviosas?– podría jugar un papel esencial en los procesos [musicales] creativos."[32] El ruido $1/f$ es, precisamente, el que resulta al tocar simultáneamente una vastedad –miles, cientos de miles, millones– de grabaciones musicales, con y sin participación de la voz humana.[33]

Basándose en estos resultados, Daugherty *et al.*,[34] así como Manaris *et al.*[35] identifican un grupo de relaciones musicales medibles según la distribución de Zipf, incluyendo aspectos de afinación, amplitud, duración de las notas, intervalos melódicos y armónicos, y espectros tímbricos. Estas investigaciones confirman la relación directa, sugerida por Voss y Clarke (1975, 1978), entre configuración autosemejante ($\sim 1/f$) del sonido y sensación subjetiva del sonido como tendencia de preferencias expresivas y gramaticales. Sin nombrarlas de este modo, Moles[36] reconoce estas características en el contexto de la teoría de la información, como *frecuencias de asociación* en alturas musicales, en muestras tomadas de la obra de J.S. Bach y Beethoven, ordenadas en una matriz de Markov.[37] Claramente, este orden coincide con una tendencia hacia la distribución de Zipf. Pero esta tendencia no se constriñe a las alturas y sus duraciones; se extiende prácticamente a todos los parámetros de la música –incluyendo los *más subjetivos*, que igualmente dependen de la ley de Weber-Fechner. Hay que recordar, en este contexto, que Wickelgren[38] descubrió una ley potencial específica para los procesos de la memoria humana de corto y mediano plazo, la cual rige los ritmos regulares del olvido, bajo condiciones estadísticamente *normales*.

Obviamente, una tradición musical no puede ser reducida a una sucesión numérica –ni la de Fibonacci, ni la serie armónica, ni ninguna otra. Sin embargo, para investigar la autoestructuración y evolución de las tradiciones y los estilos musicales, es necesario explorar las tendencias de comportamiento de esas sucesiones, en la más amplia variedad de casos posible y con una aproximación a las relaciones no lineales para poder formular analogías válidas. El árbol de Farey es una llave de acceso a esta perspectiva.

---

32 Voss & Clarke, 1975, p. 258.
33 *cf.* Hsü & Hsü, 1990; Hsü, 1993; Das & Das, 2006.
34 Daugherty *et al.*, *op. cit.*
35 Bill Manaris, D. Vaughan, Ch. Wagner, J. Romero y R. B. Davis "Evolutionary Music and the Zipf-Mandelbrot Law: Developing Fitness Functions for Pleasant Music" en *Lecture Notes in Computer Science, Applications of Evolutionary Computing, LNCS 2611, EvoMUSART2003 – 1st European Workshop on Evolutionary Music and Art*, Essex, UK, Springer-Verlag, Berlín, 2003, pp. 522–534.
36 Abraham Moles, "Approche informationnelle de la perception et de la creation musicale", *International Review of the Aesthetics and Sociology of Music*, 1986, vol. 17, n. 2, pp. 288–290.
37 También conocida como *matriz estocástica*, *de probabilidad* o *de transición*, es una matriz utilizada para describir las transiciones en una cadena probabilística de Markov. Tiene uso común en teoría de la probabilidad, estadística, álgebra lineal e informática, así como en algoritmos para producir música electrónica automatizada.
38 Wayne A. Wickelgren, "Single-trace fragility theory of memory dynamics", *Memory & Cognition*, 1974, vol. 2, n. 4; pp. 775–780.

El árbol de Farey

El árbol de Farey[39] es una sucesión que autogenera el conjunto total de los racionales, partiendo del intervalo $[{}^{0}/_{1}, {}^{1}/_{1}]$. Milne *et al.* lo definen del siguiente modo: "Una sucesión de Farey de orden *n* es el conjunto de fracciones irreducibles entre 0 y 1, con denominadores menores a *n*, dispuestos en orden ascendente.".[40] El árbol contiene todas las combinaciones entre los números de la sucesión. De este modo, si el *orden* del árbol es 4, se genera la sucesión:

$$ {}^{0}/_{0}, {}^{0}/_{1}, {}^{0}/_{2}, {}^{0}/_{3}, {}^{0}/_{4}, {}^{1}/_{0}, {}^{1}/_{1}, {}^{1}/_{2}, {}^{1}/_{3}, {}^{1}/_{4}, {}^{2}/_{0}, {}^{2}/_{1}, {}^{2}/_{2}, {}^{2}/_{3}, {}^{2}/_{4}, {}^{3}/_{0}, {}^{3}/_{1}, {}^{3}/_{2}, {}^{3}/_{3}, {}^{3}/_{4}, {}^{4}/_{0}, {}^{4}/_{1}, {}^{4}/_{2}, {}^{4}/_{3}, {}^{4}/_{4}. $$

La magnitud de los cocientes de los coeficientes define el orden de aparición en el conjunto, distribuyéndose convencionalmente de menor a mayor y de izquierda a derecha. Debido a que algunos de estos quebrados no tienen *valor real*, por ejemplo ${}^{0}/_{0}$ ó ${}^{4}/_{0}$, y otros son equivalentes (por ejemplo ${}^{1}/_{1}$, ${}^{2}/_{2}$, ${}^{3}/_{3}$ y ${}^{4}/_{4}$), la sucesión puede simplificarse así:

$$ {}^{0}/_{1}, {}^{1}/_{1}, {}^{1}/_{2}, {}^{1}/_{3}, {}^{1}/_{4}, {}^{2}/_{1}, {}^{2}/_{3}, {}^{3}/_{1}, {}^{3}/_{2}, {}^{3}/_{4}, {}^{4}/_{1}, {}^{4}/_{2}, {}^{4}/_{3}. $$

Puesto que el valor de las fracciones debe estar entre 0 y 1, consecuentemente se eliminan aquellas fracciones superiores a 1; o sea, aquellas cuyo numerador es mayor que su denominador. La sucesión queda del siguiente modo:

$$ {}^{0}/_{1}, {}^{1}/_{1}, {}^{1}/_{2}, {}^{1}/_{3}, {}^{1}/_{4}, {}^{2}/_{3}, {}^{3}/_{4}. $$

Al ordenar las fracciones de mayor a menor y distribuyéndolas jerárquicamente, respecto de la primera y la última en el intervalo [0,1], se obtiene el siguiente árbol de jerarquías:

$$
\begin{array}{ccccccc}
{}^{0}/_{1} & & & & & & {}^{1}/_{1} \\
 & & & {}^{1}/_{2} & & & \\
 & & {}^{1}/_{3} & & {}^{2}/_{3} & & \\
 & {}^{1}/_{4} & & & & {}^{3}/_{4} &
\end{array}
$$

[39] El árbol y la sucesión de Farey reciben este nombre en honor del geólogo John Farey (1766–1826), quien en 1816, en una carta publicada por la *Philosophical Magazine* de Londres, propuso una nueva forma jerárquica de clasificar las fracciones. Farey formuló la conjetura de que cada nuevo término en la expansión de la sucesión corresponde a la "mediante" de sus vecinos. Farey no probó, sin embargo, esta propiedad. La prueba se atribuye a A.-L. Cauchy, quien leyó la carta de Farey y publicó sus resultados en sus *Exercices d'analyse et de physique mathematique* (1840–47).

[40] Milne *et al.*, 2007, p. 22.

Si en lugar de 4, el *orden* es 5, se obtiene el árbol *estándar* de Farey:

$$
\begin{array}{ccccccc}
0/1 & & & & & & 1/1 \\
 & & & 1/2 & & & \\
 & 1/3 & & & & 2/3 & \\
1/4 & & 2/5 & & 3/5 & & 3/4
\end{array}
$$

Si en lugar de 5, el *orden* es 8, se obtiene la continuación:

$$
\begin{array}{ccccccc}
0/1 & & & & & & 1/1 \\
 & & & 1/2 & & & \\
 & 1/3 & & & & 2/3 & \\
1/4 & & 2/5 & & 3/5 & & 3/4
\end{array}
$$

$$1/5 \quad 2/7 \quad 3/8 \quad 3/7 \quad 4/7 \quad 5/8 \quad 5/7 \quad 4/5$$

Rasch[41] observa que la distribución jerárquica del árbol de Farey corresponde con la noción más general de jerarquía armónica en música, en que –según la tradición pitagórica, basada en la serie armónica– los intervalos mayores o "más consonantes" corresponden a proporciones más simples.[42] Bajo este criterio, Rasch usa el árbol de Farey para definir "nuevos" conjuntos de intervalos, que propone como afinaciones alternativas al temperamento igual (basado en logaritmos de las frecuencias, no en razones pitagóricas). Este neopitagorismo tiene especial interés en la evolución del árbol de Farey hacia razones "muy grandes" (o sea, quebrados con muy grandes numeradores y denominadores), pues incluso las regiones "más apartadas" de las razones simples, derivan de familias de razones simples. En otras palabras, las regiones apartadas de las razones simples tienen un lugar específico como aproximación –si así se quiere– a una afinación irracional. Estas regiones de aproximación irracional corresponden a los "niveles profundos" en un árbol de Farey con grandes numeradores y denominadores. El argumento de Rasch se beneficia de esta condición, pues no es posible elaborar sistemas escalares con esta complejidad –al mismo tiempo racional y con aproximaciones numéricas de "largo plazo" hacia los irracionales–, por medio de la afinación igual, *i.e.* mediante un conjunto de logaritmos.

En este contexto, mientras Rasch adapta el árbol de Farey para la elaboración de una teoría armónica, Large y Kolen[43] y Pressing[44] interpretan el desdoblamiento del árbol por su significado en la

[41] Rudolf A. Rasch, "Farey systems of musical intonation", *Contemporary Music Review*, 1988, vol. 2, n. 2; pp. 31–67.
[42] *cf.* Hermann von Helmholtz, *Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik*, F. Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1863.
[43] Edward W. Large y John F. Kolen, "Resonance and the Perception of Musical Meter" en (N. Griffith & P.M. Todd, eds.) *Musical Networks: Parallel Distributed Perception and Performance*, The MIT Press, Cambridge, Mass.,1999, pp. 65–96.
[44] Jeffrey Pressing, "Testing Dynamical and Cognitive Models of Rhythmic Pattern Production" en (D.J. Glencross & J.P. Piek, eds.) *Motor Control and Sensory Motor Integration: Issues and Directions*, Elsevier Science, Amsterdam; 1995, pp. 141–170; Jeffrey Pressing, "Referential Behavior Theory" en (J.P. Piek, ed.) *Motor Behavior and Human Skill: A Multidisciplinary Approach*, Human Kinetics Publishers, Champaign, Illinois, 1998, pp. 357–384.

elaboración e identificación del metro y el ritmo musical, haciendo una analogía con el comportamiento fisiológico, análogo a las características del árbol de Farey y las *lenguas de Arnold*, en sus aspectos de orientación a partir de unas razones y condiciones iniciales relativamente simples.

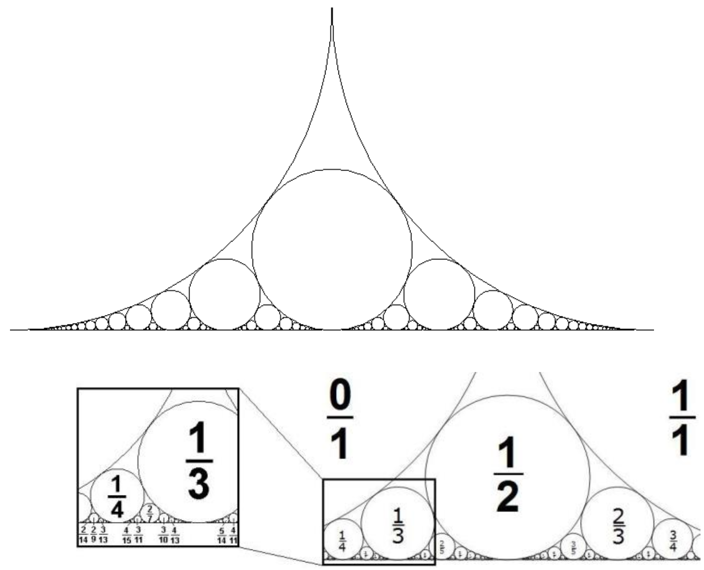

Fig. 2. Arriba: Árbol de Farey representado con círculos de Ford. La autosemejanza estadística de este conjunto infinito es notoria, relacionada con objetos fractales de simetría de mapas de períodos doblados. Abajo: Detalles del conjunto, mostrando los valores fraccionarios de sus mayores elementos, correspondientes al árbol de Farey. (*Vid. Adenda aclaratoria*, al final de este texto).

Agmon (1989, 1995) investiga las "consecuencias cromáticas y enarmónicas" del árbol de Farey, y la relación que las propiedades distributivas del mismo presentan respecto de la coherencia estructural de la escala diatónica.[45] El mismo Agmon (1996:45) define coherencia como "falta de contradicción", junto con las nociones de invariancia y autosemejanza:

> Definición: *Coherencia*. Dado un conjunto de pares enteros $\{(u, v)\}$, $0 \leq u \leq a-1$, $0 \leq v \leq b-1$ [donde a y b son *intervalos básicos* de una escala tonal] diremos que el conjunto es coherente si para cada par de pares enteros (u, v) y (u', v') en el conjunto dado, la relación $u > u'$ se mantiene para $v' \geq v'$.
>
> Corolario: Dado un conjunto coherente de pares enteros $\{(u, v)\}$, para cada par de enteros pares (u, v) y (u', v') en el conjunto coherente tal que $v > v'$, la relación $u \geq u'$ se mantiene.
>
> Definición: *Sistema escalar coherente*. Diremos que un sistema escalar $SS(a, b)$ es coherente si $\{(u, v)\} = I(S(a, b))$ es coherente [donde I es el conjunto de intervalos diatónicos, y a, b son los *intervalos básicos* de la escala diatónica].[46]

En complemento con este enfoque analítico de la escala diatónica, Carey y Clampitt[47] destacan su proyección espacial bidimensional como mapeo en el círculo, valiéndose del heptágono inscrito en el

[45] Eytan Agmon, "A Mathematical Model of the Diatonic System", *Journal of Music Theory*, 1989, vol. 33, n. 1; pp. 1–25; Eytan Agmon, "Diatonicism and Farey series", *Muzica*, 1995, vol. 6, n. 1; pp. 68–74.

[46] Eytan Agmon, "Coherent Tone-Systems: A Study in the Theory of Diatonicism", *Journal of Music Theory*, 1996, vol. 40, no. 1; p. 45.

círculo para representar las siete alturas encadenadas consecutivamente por los seis intervalos idénticos de la quinta justa (un ejercicio que desarrolla Guerino Mazzola).[48] Enseguida, Carey y Clampitt comparan este mapeo con el mapeo en el círculo de otros polígonos simples, regulares e irregulares, representando escalas con distintas colecciones de alturas. Las conclusiones que arroja este método –en concordancia con la caracterización de las *perspectivas tonales* y su mapeo de (a)simetrías propuesto por Mazzola, *op. cit.*– llevan a establecer vínculos directos entre las propiedades de invariancia que reconoce la teoría de conjuntos de clases de alturas, con las nociones de coherencia y consistencia estructural asentadas en las teorías físico-matemáticas de recursividad y autosemejanza.

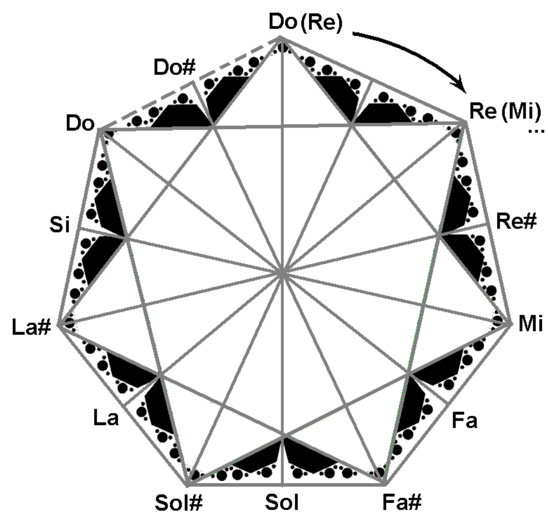

Fig. 3. Representación del concepto de coherencia estructural como autosemejanza en la escala diatónica, respecto de la cromática. La flecha indica que el esquema debe ser leído en el sentido de las agujas del reloj. Los "pasos" o intervalos básicos de ambas escalas están sugeridos por los lados (tonos) del heptágono interior y por mitades de lados (medios tonos) del heptágono exterior. A partir del Do inicial, las líneas rectas más largas son interpretadas como mayores jerarquías armónicas (intervalos de quinta justa, tercera mayor y segunda mayor, en ese orden). Los intervalos distribuidos en la mitad izquierda son interpretados como jerarquías subsecuentes, reflexiones simétricas de la mitad derecha (bajo esta lógica, la séptima menor tiene menor jerarquía que la tercera mayor, simétrica). El Do a la primera octava tiene características especiales: nótese que sus simetrías más inmediatas (segmento superior de la figura) contienen la estructura de las terceras y segundas, y también se asocia con el intervalo de cuarta justa (Fa) como "inversión" de la quinta. Además, esta octava aparece como simetría radial entre ambos Do, lo cual sugiere la generación de la misma estructura en un siguiente nivel ("a la octava"). Este patrón autorreferencial se repite cada vez que se efectúa una rotación del sistema (asemejando la "espiral" o "caracol" que mencionan los tratados de armonía renacentistas). Finalmente los segmentos sólidos en los subintervalos del heptágono representan una relación análoga respecto de los microintervalos armónicos del sistema, con jerarquías mayores y subordinadas. Este esquema sintetiza conceptos de Carey y Clampitt (1989) y Mazzola (1990), pero destaca sus propiedades autosemejantes intrínsecas. La representación de las funciones tonales también puede efectuarse como celosía de hexágonos, mediante la teselación conocida como *Tonnetz* (Euler, 1739; Riemann, 1886).

[47] Carey y Clampitt ,1989, pp. 188–190.
[48] Guerino Mazzola, *Geometrie der Töne*, Birkhäuser Verlag, Basilea, 1990.

La Fig. 3 presenta niveles *inferiores* y *superiores* de autosemejanza; o sea que el heptágono en el cual se inscriben las escalas diatónica y crómática, generando ciclos de relaciones (algunas de ellas ya explícitas en el *círculo de quintas*), también puede ajustarse a ciclos "menores" o "mayores" de macrointervalos y microintervalos. En la Fig. 3 estos últimos se sugieren mediante las pequeñas figuras sólidas, adyacentes al heptágono exterior. Las relaciones de autosemejanza entre estos niveles garantizan el tipo de coherencia que exigen Agmon[49] y Lerdahl y Jackendoff,[50] como sistemas consistentes de estructuración musical. Otros polígonos adaptados a esta exigencia pueden asociarse a escalas análogas a la diatónica y la cromática, sean convencionales o no en la tradición occidental.[51] La noción de que *todas* las escalas racionales pueden caracterizarse por polígonos y fracciones de polígonos, se conecta directamente con la posibilidad de representar esas mismas escalas y relaciones entre escalas, mediante sucesiones específicas de racionales; de ahí la utilidad del árbol de Farey.

Es importante notar que el árbol de Farey, con sus atributos musicales –analíticos y compositivos– está relacionado asimismo con la noción de armonía y proporción espacial/temporal mediante la sucesión de Fibonacci y la proporción áurea: descendiendo en zigzag en el árbol de Farey se obtiene la sucesión $^1/_1$, $^1/_2$, $^2/_3$, $^3/_5$, $^5/_8$…, cuyos numeradores y denominadores corresponden a la sucesión de Fibonacci, y su división consecutiva tiende a la proporción áurea. Este rasgo –de manera análoga a como suele ocurrir en una grabación o una partitura, por sus puntos de quiebre estructurales– es una confirmación del carácter autorreferente del árbol de Farey. Aunque, más exactamente, el árbol de Farey es un sistema que elabora sucesivas estructuras estructurantes, autorreferentes, correlacionadas y geométricamente consistentes.

Carey y Clampitt[52] consideran una relación de coherencia entre un conjunto de escalas tradicionales bajo la noción de *buena formación*: "las escalas pentatónica, diatónica y cromática comparten la misma estructura subyacente, la de una escala *bien formada*". Carey y Clampitt añaden a este marco teórico "la relación tónica-subdominante-dominante, los sistemas arábigo de 17 tonos, y chino de 53 tonos, y otros sistemas de alturas en la música no occidental".[53] Esencialmente, su postulado se refiere a la "coherencia" estructural de las escalas por su afinidad racional y proporcional. Esta noción de coherencia está relacionada con el *Teorema de los tres intervalos*.

---

49 Agmon, 1996;
50 Lerdahl y Jackendoff, 1983.
51 De hecho, esta perspectiva subyace en la teoría armónica de los llamados *diamantes multidimensionales* del compositor y teórico musical mexicano Ervin Wilson (Chihuahua, 1928).
52 Carey y Clampitt, 1989, p. 206.
53 Carey y Clampitt, 1989, p. 187.

Formulado por la matemática Vera T. Sós (1930–), el *Teorema de los tres intervalos* –que es la comprobación de la *conjetura de Steinhaus*– afirma que para todo número irracional *mapeado en el círculo*, sus puntos correspondientes segmentan el círculo formando arcos o intervalos, al menos en dos diferentes longitudes y como máximo en tres. En otras palabras, toda función irracional es susceptible de ser mapeada en el círculo –mediante rotaciones rígidas–, cuando menos con dos distancias distintas y cuando mucho con tres (distancias distintas). El mapeo de intervalos racionales bajo este mismo esquema está probado como un caso más simple, pues sus ciclos siempre caen en una misma longitud para cada intervalo de la rotación. Las consecuencias de este teorema respecto de la teoría de la música son muy significativas, pues implica que *todo* sistema de intervalos –racionales e irracionales– se inserta dentro de un mismo patrón de sistemas de intervalos. En su forma más generalizada, este patrón coincide con las llamadas *lenguas de Arnold* que se describen en la sección final de este texto.

Carey y Clampitt relacionan el *Teorema de los tres intervalos* con las clases de alturas estructuradas según reglas de *buena formación* en la música tonal occidental: "La prueba del teorema de los tres intervalos demuestra que cuando un conjunto de alturas arroja tres distintas longitudes o intervalos, el mayor, sea x, es la suma de los dos intervalos, y y z.".[54] Luego concluyen que esta relación produce información jerárquica sobre cualquier conjunto de alturas musicales generado por un mismo intervalo, incluyendo sus mapeos con números naturales. Las fracciones continuas que se obtienen por este procedimiento –su mapeo en el círculo– están directamente relacionadas con el árbol de Farey, pues las posiciones de máxima adyacencia en este árbol son definibles como estables en relación de *unimodularidad*, definida para dos razones $^{p}/_{q}$ y $^{m}/_{n}$, como $|\,pn - qm\,| = 1$. Según Pressing (1995:150) esto resulta en un comportamiento isomorfo respecto de las posiciones adyacentes en las lenguas de Arnold, como se describe en la sección subsiguiente.

Las lenguas de Arnold como patrimonio musical

Según Schroeder, "el árbol de Farey es una especie de esqueleto matemático de las lenguas de Arnold".[55] En física teórica y matemáticas, las lenguas de Arnold, llamadas así en honor del matemático Vladimir I. Arnold (1937–2010), son estructuras de jerarquías armónicas que emergen en las regiones del llamado *modo de cerradura* (Ω) en el *mapeo en el círculo*.[56]

---

[54] Carey, 2007, p. 84.

[55] Manfred Schroeder, *Fractals, Chaos, Power Laws: Minutes from an Infinite Paradise*, W.H. Freeman, Nueva York, 1991, p. 336.

[56] Comúnmente simbolizado por Ω, el modo de cerradura (en inglés *phase-locking* o *mode-locking*) del mapeo en el círculo se define como "la interacción no lineal de un sistema dinámico para generar un comportamiento periódico que persiste en un rango de parámetros." *Vid.* Neil S. Rasband, *The Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems*, Wiley VCH, Weinheim, 1990, p. 218.

El mapeo en el círculo acopla dos osciladores periódicos, uno modificando al otro para producir comportamientos *no lineales*. Se dice que un sistema físico o matemático es "no lineal" cuando las ecuaciones de movimiento o evolución que representan su comportamiento no están sujetas al *principio de superposición*, según ocurre en un sistema lineal, predecible por la suma simple entre sus partes. Los comportamientos no lineales, en cambio, suelen ser poco o nada intuitivos como sistemas conjuntos; su grado de impredictibilidad es alto.[57] En este sentido, cabe mencionar que, aunque en las lenguas de Arnold "anidan" categorías intuitivas de razones musicales armónicas, éstas no pueden ser inferidas simplemente como sucesión de razones –utilizando los mismos métodos para obtener, *e.g.* una sucesión numérica de términos consecutivos, o una progresión geométrica simple. En principio, el mapeo del círculo se produce al iterar la ecuación

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \Omega - \frac{K}{2\pi}\,\sin(2\pi\theta_i),$$

donde θ se interpreta como *ángulo polar*, de manera que su valor existe entre 0 y 1; mientas i es el número de iteración del sistema. Los dos parámetros, K y Ω corresponden, respectivamente, a la "fuerza de acoplamiento" (por analogía con un ciclo que recibe un impulso periódico) y la "fase de conducción" (por analogía con un ciclo asociado al anterior, con comportamiento propio, según ocurre *e.g.* en una sucesión consecutiva de intervalos). Finalmente, $\sin(2\pi\theta_i)$ corresponde al acoplamiento no lineal que describe las perturbaciones para cada período del oscilador conducido por el acoplamiento con el parámetro K.

[57] Ejemplos típicos de sistemas no lineales son el comportamiento climático, las turbulencias en un flujo continuo o la transformación de un estilo musical en un contexto histórico.

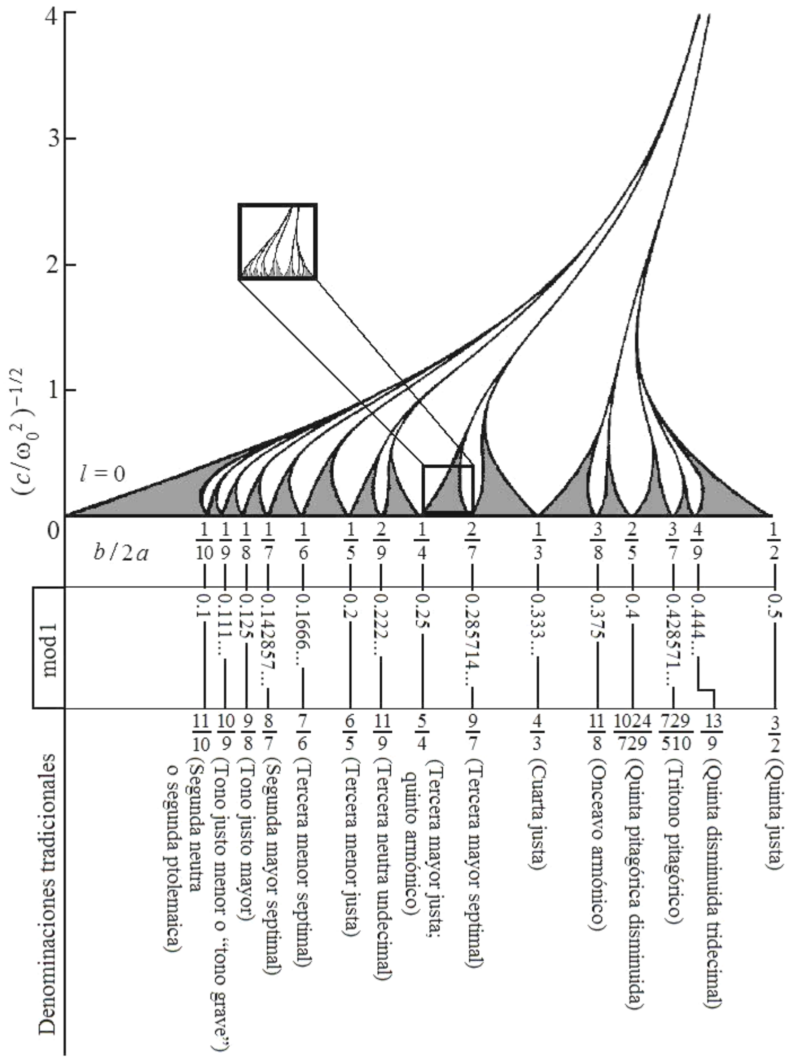

Fig. 4. Parte superior del esquema:

Lenguas de Arnold en el diagrama de fase (Ω) para el modelo continuo propuesto por Aubry en “Solitons and Condensed Matter Physics” en (A.R. Bishop & T. Schneider, eds.) *Springer Series in Solid State Physics*, vol. 8; Springer, Berlín, 1979; pp. 264–278,), empleando la correlación entre $(c/\omega_0^2)^{-1/2}$ y $b/2a$. La ordenada corresponde a la medida de la intensidad de potencial periódico del modelo, mientras que la abscisa corresponde a la familia de razones obtenidas por la función. (Para una explicación detallada *vid.* Per Bak, “Commensurate phases, incommensurate phases and the devil’s staircase”, *Reports on Progress in Physics*, 1982, vol. 45, p. 612). Las razones más simples corresponden a espacios mayores o regiones de comportamientos más estables, propiamente las “lenguas” o espacios en blanco entre las sigmoides. El recuadro muestra la estructura amplificada de un segmento del sistema, señalando la composición autosemejante del conjunto. Las lenguas de Arnold son definidas por Rasband (op. cit., pp. 130–131, 217) como “resonancias surgidas de los números racionales en variables de parámetros, en espacios de variables bidimensionales”.

Parte inferior del esquema:

Correspondencia de las lenguas de Arnold respecto de razones musicales convencionales para el rango $^1/_{10}$ a $^1/_2$, comprendiendo la extensión de una quinta justa ($^3/_2$) en módulo 1. Los intervalos más notorios de las lenguas tienen una correspondencia igualmente sobresaliente con sus analogías musicales. En este sentido resulta fácil identificar las regiones estables de la quinta y cuarta justa, y la tercera mayor y menor justa (en este esquema el adjetivo “justo” se refiere al temperamento). El recuadro pequeño en el esquema superior sugiere que los intervalos principales contienen a su vez (infinitas) menores jerarquías que repiten su composición autosemejante en sistemas armónicos sucesivos.

Las lenguas de Arnold aparecen en algunas regiones de parámetros del mapeo en el círculo, donde se fijan los valores límite para las frecuencias en recurrencia (propiamente, Ω). En este contexto, las lenguas muestran los múltiplos racionales de *n*, que se comportan caóticamente, transitando de proporciones mayores a menores, dentro del mismo sistema (*vid.* Fig. 4). Dependiendo del tipo de ecuación que se utilice para obtener las lenguas, para cada mapeo del círculo hay una familia de razones correspondientes. Sin embargo, a pesar de las diferentes posibilidades de aproximación a las lenguas, se observa una tendencia generalizada en que las razones más simples corresponden a espacios mayores, estables o "no caóticos". En un modelo físico-matemático, este comportamiento puede compararse con los aspectos más generales de la teoría armónica de Helmholtz, distinguiendo jerarquías estables en términos de proporciones "consonantes", y jerarquías inestables como proporciones "disonantes".

El esquema en la Fig. 4 muestra las coincidencias entre una aproximación a las lenguas de Arnold, respecto de intervalos musicales convencionales específicos (en módulo 1). A diferencia del tritono pitagórico $^{729}/_{512}$ ó $^{729}/_{510}$ –que varía por una milésima del hipotético $^{3}/_{7}$– la coincidencia con las demás razones es exacta; lo cual sugiere que las lenguas de Arnold son, estrictamente, un modelo armónico multiescalar que permite predecir y entender las formas de correlación entre distintos sistemas racionales de entonación, pero también entre distintos intervalos dentro del mismo sistema. El ejemplo dado en la Fig. 4 se limita a la extensión de una quinta justa, sin embargo el esquema puede ampliarse y volverse más preciso, respecto de una mayor cantidad de empatías sistemáticas (que correspondan a intervalos y familias de intervalos específicos).[58]

Large y Kolen[59] destacan que el comportamiento de la fase de cerradura Ω es "altamente estructurado" –habría que añadir que es altamente autoestructurante, conforme la ecuación generatriz se itera. Estos autores sugieren, asimismo, que la dinámica generalizada de las lenguas de Arnold corresponde al "régimen de diagrama" dictado por el árbol de Farey, e indican que "el ancho de cada *lengua* refleja la estabilidad de la fase de cerradura correspondiente, para una fuerza de un acoplamiento dado; es decir, para su sensibilidad al ruido en la razón $^{p}/_{q}$", o bien $^{K}/_{2\pi}$ en la ecuación modelada al inicio de esta sección.

Large y Kolen también observan que "en los ritmos musicales, los eventos no necesariamente ocurren sobre cada pulso"[60] en un esquema como el anterior. Por lo tanto, el pulso musical no puede ser

---

[58] En cierto modo, las lenguas de Arnold operan "como si" los segmentos del modelo en la Fig. 3 se desplegasen bajo un orden y un sistema de relaciones armónicas más explícitos y abarcando una variedad virtualmente infinita de escalas (y no sólo la que en la Fig. 3 se representa como relaciones del heptágono).

[59] Large y Kolen, *op. cit.*, p. 76.

[60] Large y Kolen, *op.cit.* pp. 76–77.

adecuadamente modelado como un arrastre hacia un seguimiento de fase. Para modelar el pulso de manera realista, el oscilador debe identificar y "recordar" el período de pulsos. A este fin, Large y Kolen[61] sugieren un "seguimiento" de frecuencias. Este seguimiento revela los puntos en que el acoplamiento de ciclos en la función perturba, a través de la señal conductora, el período intrínseco del oscilador conducido. Así, "el oscilador de seguimiento de frecuencias modela el pulso musical real, porque cuando la señal conductora es removida, el oscilador continúa en la frecuencia del conductor, 'esperando' el eventual regreso del [ciclo] conductor."[62] En términos musicológicos, esto es notable porque constituye un modelo que conjuga la rigidez de un ciclo bien establecido –algo que se observa fácilmente en los moldes de la escritura musical convencional– con la flexibilidad conseguida por un ciclo "forzado" por el intérprete –y que, sin embargo, no se aparta por completo de las conductas generalizadas, asociadas al repertorio que interpreta.

Más recientemente, el mismo Large sintetiza la afinidad de este modelo respecto de las características que definen el sistema nervioso, como "interacción de neuronas que actúan como coordinaciones de excitación e inhibición", y como fuente de la "oscilación neural" que condiciona y diseña las preferencias, no sólo rítmicas (particularmente asociables a la actuación del cerebelo), sino melódico-armónicas (asociables a la actuación de la corteza auditiva en interacción con otras regiones cerebrales).[63] En este modelo reaparecen dos variables de cuya coordinación resulta una "variable compleja" en resonancia con los valores de la función. Tanto la resonancia como el comportamiento de los dos osciladores acoplados –asociados a las variables– son perfectamente análogos al mapeo del círculo o mapeo de Arnold. Las conclusiones de Large son relevantes:

(1) Lo mismo en rítmica y métrica que en melodía y armonía, la expectativa para resolver un estado relativamente *inestable* hacia uno *estable*, se debe a la orientación en el acoplamiento de las funciones neurales hacia las "resonancias no lineales" producidas por la interacción entre excitación e inhibición electroquímica en las células del sistema nervioso. Dicho de otro modo, las lenguas de Arnold modelan un comportamiento autoorganizado no desprovisto de regiones de caos, pero tendiente a formar regiones estables o *mesetas de orientación* caracterizadas por las razones más simples y prominentes en las lenguas, las cuales también tienden a "filtrar el ruido" adyacente, producido por las regiones menos estables. Este comportamiento es análogo de un contexto musical estilístico en que también hay patrones recurrentes más estables respecto de conductas sucedáneas. De lo cual se infiere que los

---

[61] Large y Kolen, *ibid.*
[62] Large y Kolen, *op.cit.* p. 77.
[63] Edward W. Large, "A Dynamical Systems Approach to Musical Tonality" (R. Huys & V.K. Jirsa, eds.), *Nonlinear Dynamics in Human Behavior*, SCI 328, Springer-Verlag Berlín / Heidelberg, 2010, pp. 193–211.

biorritmos del individuo, de las comunidades y de la especie condicionan los rasgos culturales identificados como "tradiciones" y "estilos", a su vez en diálogo con el individuo, las comunidades y la especie, formando complejidades autorreferentes.

(2) En una estimulación auditiva multifrecuencial, la respuesta de una red de osciladores puede –y debe, con tal de lograr un modelo realista del proceso auditivo– incluir armónicos, subarmónicos, razones de enteros y adición y substracción entre diferencias de tonos. El paisaje generalizado de esta relación coincide con un sistema de lenguas de Arnold, de lo cual el esquema de consonancia-disonancia de Helmholtz es una intuición primitiva, pero esencialmente correcta.

(3) El modelo de aprendizaje sugerido por la "ley del menor esfuerzo", estudiado exhaustivamente en lingüística a partir de Zipf,[64] puede entenderse como sistema de correlaciones, en el sentido de *empatías* neurales masivas, que se relacionan con procesos coordinados de excitación e inhibición, cuya actuación corresponde a las "regiones estables" mencionadas en el punto anterior. Large concibe esta noción desde la teoría de plasticidad sináptica de Hebb, suponiendo que la persistencia de una actividad repetitiva o "señal" tiende a inducir cambios celulares duraderos que promueven su estabilidad.[65] Nuevamente, estas regiones de estabilidad, en coexistencia con procesos de caos, presentan analogías sustanciales respecto del mapeo de Arnold.

(4) Finalmente –afirma Large– "la dinámica percibida en la organización tonal surge de la física de la resonancia no lineal".[66] Habría que añadir que la música, en toda su complejidad acústica y psicológica emerge, con sus tendencias características entre estabilización y dispersión –tanto en lo local como en lo universal–, de la resonancia no lineal descrita por las lenguas de Arnold. Este último punto trasciende el sentido de *universalismo musical* en el sentido que demuestra un comportamiento común entre sistemas neurales que acoplan sistemas de excitación e inhibición como procesos auditivos. En suma, es insostenible que la música sea un atributo exclusivamente humano; por el contrario, según esta hipótesis, *todas* las especies e individuos animales que se caractericen por un tipo de resonancia no lineal entre sistemas neurales masivos de comunicación auditiva, satisfarán los tres puntos anteriores, involucrando patrones específicos de (*a*) repetición, variación, orientación y resolución; (*b*) complejidad; y (*c*) sistemas empáticos y económicos de aprendizaje.

---

[64] George K. Zipf, *The Psychobiology of Language*, Houghton-Mifflin, Boston, 1935; George K. Zipf, *Human Behavior and the Principle of Least Effort*, Addison-Wesley, Redwood City, Cal., 1949.
[65] Large, 2010, p. 194–195.
[66] Large, 2010, p. 209.

En Pareyón[67] se precisa el objetivo de demostrar desde distintas perspectivas, cómo la autosemejanza es la superficie simbólica de un sistema de autorreferencia.[68] Mientras lo semejante es simplemente una intuición de proximidad simbólica subjetiva (metáfora) u objetiva (analogía), lo autosemejante depende de la analogía estricta (razones y proporciones) en un sistema que se implica y elabora a y por sí mismo. En esto último reside el significado de las sucesiones y árboles numéricos, el acoplamiento dinámico de osciladores en fase de cerradura y los mapeos de Arnold: sus analogías son exactas respecto de una gran diversidad de recursiones en los sistemas y sociedades biológicos.[69] Este panorama abarca, necesariamente, a la música en sus manifestaciones más variadas al mismo tiempo que afirma sus diferencias como autoestructuración de *pluralidad dentro de la unidad*.

Conclusiones

Las lenguas de Arnold presentan una cascada de familias de números racionales, a su vez compuesta por cascadas de familias de números racionales. Cada región de estas lenguas, así como el sistema en su conjunto, se "orientan" por armonías neopitagóricas (conjuntos de racionales relativamente simples) con intersticios de difusión que eventualmente constituyen *regiones de racionales* progresivamente más complejos, en el sentido de que cada vez requieren numeradores y denominadores más grandes entre intervalos armónicamente distribuidos en R (o sea, el conjunto de los reales). Según Large, este *paisaje* de tendencias autoorganizadas entre la *sencillez* y la *complejidad*, empata la estructura de estructuras que es la música –en sus distintos parámetros cognitivo-culturales–, con la estructura de estructuras del sistema biológico de percepción y elaboración musical que es el cuerpo humano.[70]

Las lenguas de Arnold revelan una trama común entre sonidos, formas y estilos musicales, y biorritmos involucrados con la elaboración, percepción y transformación de la música. Las evidencias empíricas de esta "trama común", principalmente la ubicuidad del ruido fraccionario $1/f$, típico de los enlaces carbónicos de la química orgánica, así como sus proyecciones geométricas en las estructuras musicales, apuntan al hecho de que la participación de los átomos de carbono en la autoestructuración

[67] Gabriel Pareyón, *On Musical Self-Similarity: Intersemiosis as Synecdoche and Analogy*, International School of Semiotics, Acta Semiotica Fennica 39 (Approaches to Musical Semiotics; 13), Helsinki / Imatra, 2011; Gabriel Pareyón, "A Fractal Conjecture of Language: Proposal for a Cognitive Frame of Linguistics" en (E. Tarasti, ed.) *Communication: Understanding, Misunderstanding. Proceedings of the 9th Congress of the IASS-AIS*, Helsinki / Imatra, 2009a, vol. 3; pp. 1300–1306; Gabriel Pareyón, "The Ecologic Foundations of Stylistics in Music and in Language" en (A. Kyriakidou & J. Yannacopoulou, eds.) *Proceedings of the 2nd International Conference for PhD Music Students*, Aristotle University/University of Edinburgh, Thessaloniki, Greece; 2009b, pp. 126–133.

[68] El germen de esta noción se encuentra en Shahrokh David Yadegari, "Self-Similar Synthesis: On the Border between Sound and Music", MIT, Cambridge, Mass. (tesis de maestría), 1992 p. 69.

[69] Vaughn (1990:117) ofrece evidencia para considerar que en un repertorio de cantos chamánicos tradicionales de Karelia, la relación entre periodización de la respiración e intensidad verbal y expresiva corresponde a un estado específico de la *fase de cerradura* (Ω) en el mapa de Arnold. Pareyón (2011:383–386) presenta documentación en este mismo sentido, respecto de un repertorio musical tradicional del pueblo k'miai, nativo de Baja California.

[70] Large, 2010, pp. 194–197.

de los procesos musicales (así como verbales, si consideramos que el habla humana está íntimamente ligada a los procesos de sincronización cardiorrespiratoria, y a una relación oxígeno-carbono), son en conjunto expresiones físicas de una latencia carbónica.[71] En resumen, y parodiando la frase célebre de José Vasconcelos, podemos formular la hipótesis, "por la música hablará el carbono".[72]

Aparentemente, las distintas maneras de estructurar en música pueden tener similitudes, pero también muy grandes diferencias, habiendo músicas más cercanas al caos y la complejidad, y otras que están lejos de ese tipo de relaciones. No obstante, cabe afirmar que el caos y la complejidad están latentes inclusive en algunos de los ejemplos más simples de música: por ejemplo, en la repetición de un pulso siguiendo un ritmo extremadamente sencillo (*e.g.* un pulso regular en metro de $^1/_2$ ó en $^2/_4$) existen "pequeñas diferencias" que generan complejidad a largo plazo, puesto que es materialmente imposible repetir un pulso con exactitud absoluta.[73] La intuición de este principio físico es, probablemente, el fondo de la "naturalidad" en la alta valoración cultural del concepto de *tema y variaciones*. De acuerdo con lo que afirman Knopoff y Hutchinson, "en la práctica musical no sólo las interrelaciones precisas […] sino también sus desviaciones, son propiedades expresivas aceptables y aun deseables".[74] Hay que subrayar que esta noción descubre, además, una conexión profunda de las recursiones de la música y del lenguaje, con los ciclos cuánticos según los estudia la mecánica de partículas.

En esta variedad de conceptos que involucran los llamados *sistemas dinámicos*, las leyes de potencia –análogas en estructura y comportamiento, respecto de una gran diversidad de fenómenos físicos, biológicos, estéticos y culturales– modelan no solamente *casi todo* cuanto conocemos, sino que también guían nuestros propios medios de percepción y estructuración de la realidad, incluyendo relaciones entre la respiración, la vascularidad y los procesamientos modulares del cerebro; complejos de sensaciones correlacionadas y subjetividad; producción biológica del tiempo y el espacio; y por consiguiente, construcción gestáltica, memoria, aprendizaje y reelaboración de sistemas de signos, que en conjunto configuran la experiencia estética.

En suma, la teoría de la música requiere incorporarse a la discusión de estos conceptos, y proponer –al fin– definiciones operativas que permitan su descolonización y desmarcamiento de las tradiciones centralistas del análisis y el relato monocultural. Este nuevo paradigma permite formular

---

[71] Las bases de una "teoría carbónica" de la música y el lenguaje están sentadas en Pareyón, 2011, pp. 133–137, 250–252, 481–484.

[72] Esta parodia es, quizás, prosaica; sin embargo captura bien un aspecto fundamental para estas conclusiones.

[73] Incluso los relojes de cuarzo tienden a desfasarse, a largo plazo, de su periodicidad aparentemente regular. La entropía parece orientar al universo a lo largo de duraciones y espacios "muy extensos".

[74] En el texto original (*loc. cit.*): "musical practice shows [that] deviations are accepted and desired expressive properties of music". *Vid.* Leon Knopoff y William Hutchinson, "Information Theory for Musical Continua", *Journal of Music Theory*, 1981, vol. 25, n. 1, p. 19.

teorías y esquemas de necesaria pluralidad y diferencia dentro de la complejidad: no sólo admite, sino necesita de la diversidad para poder explicarse como parte y como conjunto.

Adenda aclaratoria

Con el propósito de aclarar el uso de los conceptos de *serie armónica* y los círculos de Ford, tratados arriba, se hacen las siguientes especificaciones:

La serie armónica

En matemáticas es un lugar común señalar que la serie armónica diverge. Solamente hay una manera de “interpretar” la serie armónica como convergente: en versiones salteadas de la serie; por ejemplo, $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \ldots$, que converge a 1, o bien $1/2 - 1/4 + 1/8 - 1/16 + \ldots$, que converge a $1/3$. Por su parte la llamada serie de Madhava–Leibniz, $1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + 1/9 - \ldots$ converge a $\pi/4$. El presente artículo se refiere a la computación de estas convergencias en un sistema armónico (musical) representado por una gramática generativa, por ejemplo, en la implementación de un sistema-L o sistema de Lindenmayer. La motivación para este método es la semejanza observada entre este tipo de sistemas y los procesos recursivos del lenguaje; tanto en el llamado *lenguaje natural*, como también en el *lenguaje musical* en un sentido muy amplio.

En relación con la ecuación de Zipf, distintas “versiones” de la serie armónica parecen tener lugar realista en el lenguaje natural y en la música; algunas de ellas en su forma “obvia” (la que propone Zipf para la frecuencia de las palabras como sucesión de una jerarquía probabilística, y que en música se relaciona con un régimen análogo de *probabilidad de frecuencias*, en la múltiple significación de tal concepto), y otras versiones más en la modelación esquemática (idealizada), en la convergencia del compás musical (la serie 1/2, 1/4, 1/8…, en el compás entero), o bien como aproximación física al comportamiento armónico del espectro armónico en voces e instrumentos musicales (series divergentes y convergentes, lo mismo que en versiones de la sucesión de Zipf). Esta similitud estructural entre lenguaje natural y música, complica o impide demostrar que ambos fenómenos, el verbal y el musical, son verdaderamente fenómenos distintos y completamente desvinculados.

Dicho lo anterior, las series convergentes parecen tener especial importancia en la configuración del metro, tanto en la oralidad como en la métrica musical; mientras que una variedad de series divergentes tienen importancia como variedades de la textura armónica (timbre, melodía, contrapunto, macro-acordes).

Los círculos de Ford

La imagen publicada (Figura 2) podría servirse de una guía que en su *base* (o sea, la línea inferior del esquema), sitúe un punto medio debajo del primer círculo (1/2) para señalar la mitad del mismo límite inferior. Esto facilitaría entender con mayor claridad visual, en tal ejemplo, cómo es que los siguientes intervalos generados corresponden con intervalos específicos para los números racionales. La distribución de intervalos en este límite (en la misma Figura 2), es análoga a la de los intervalos en el límite en la Figura 4 (lenguas de Arnold), en este caso dentro del intervalo [0, 1/2].

G.P.

Bibliografía

AGMON, Eytan: "A Mathematical Model of the Diatonic System", *Journal of Music Theory*, 1989, vol. 33, n. 1; pp. 1–25.

__________: "Diatonicism and Farey series", *Muzica*, 1995, vol. 6, no. 1; pp. 68–74.

__________: "Coherent Tone-Systems: A Study in the Theory of Diatonicism", *Journal of Music Theory*, 1996, vol. 40, n. 1; pp. 39–59.

ARISTÓTELES: *Metafísica de Aristóteles*, ed. trilingüe V. García Yebra, Madrid, Gredos, 1970 (2ª. ed. revisada, 1982).

AROM, Simha: *African Polyphony and Polyrhythm: Musical Structure and Methodology*, Paris, Éditions de la Maison des Sciences de l'Homme, y Cambridge, Cambridge University Press, 1996.

AUBRY, Serge: "Solitons and Condensed Matter Physics" en A.R. Bishop & T. Schneider, eds. *Springer Series in Solid State Physics*, vol. 8, Berlín, Springer, 1979, pp. 264–278.

BAK, Per: "Commensurate phases, incommensurate phases and the devil's staircase", *Reports on Progress in Physics*, 1982, vol. 45, pp. 587–629.

BENSON, David J.: *Music: A Mathematical Offering*, Cambridge, Cambridge University Press, 2007.

BERAN, Jan: *Statistics in Musicology*, Boca Raton, Fl., Chapman & Hall/CRC, 2004.

BIGERELLE, Maxence y Alain Iost: "Fractal dimension and classification of music", *Chaos, Solitons & Fractals*, 2000, vol. 11, n. 14, pp. 2179–2192.

CANRIGHT, David: "Fibonacci Gamelan rhythms", *Journal of the Just Intonation Network*, 1990, vol. 6, n. 4; pp. 4–12.

CAREY, Norman. "Coherence and sameness in well-formed and pairwise wellformed scales", *Journal of Mathematics and Music*, 2007, vol. 1, no. 2; pp. 79–98.

CAREY, Norman y David CLAMPITT. "Aspects of Well-Formed Scales", *Music Theory Spectrum*, 1989, vol. 11, no. 2; pp. 187–206.

CAREY, Norman y David CLAMPITT: "Self-Similar Pitch Structures, Their Duals, and Rhythmic Analogues", *Perspectives of New Music*, 1996, vol. 34, n. 2, pp. 62–87.

CHÁVEZ, Carlos: *Musical Thought*, Cambridge, Mass., Harvard University Press, 1961.

CHOMSKY, Noam: *Studies on Semantics in Generative Grammar*, La Haya, Mouton, 1972.

DAS, Atin y Pritha Das: "Fractal Analysis of Different Eastern and Western Musical instruments", *Fractals*, 2006, vol. 14, n. 3; pp. 165–170.

DAUGHERTY, William, Dallas Vaughan, Christopher Wagner, Penousal Machado, Juan Romero, Charles Mccormick, Tarsem Purewal, Dwright Krehbiel, Robert B. Davis, Valerie Sessions, Yuliya Schmidt, James Wilkinson y Bill Manaris: "Searching for Beauty in Music: Applications of Zipf's Law in MIDI-Encoded Music", 2003, http://www.cs.cofc.edu/~manaris/ZipfMIDI/ (consulta: junio de 2009).

DEMAREE, Robert W.: "The Structural Proportions of the Haydn Quartets", tesis doctoral, Bloomington, Indiana University, 1973.

FEINBERG, Gerald: *Solid Clues*, Nueva York, Touchstone Books, 1985.

HELMHOLTZ, Hermann von: *Die Lehre von den Tonempfindungen als physiologische Grundlage für die Theorie der Musik*, Braunschweig, F. Vieweg und Sohn, 1863.

HILLER, Lejaren A.: "Composing with Computers: A Progress Report", *Computer Music Journal*, 1981, vol. 5, n. 4; pp. 7–21.

HOWAT, Roy: "Debussy, Ravel and Bartók: Towards Some New Concepts of Form", *Music & Letters*, 1977, vol. 58, n. 3; pp. 285–293.

__________: "Bartok, Lendvai and the Principles of Proportional Analysis", *Music Analysis*, 1983a, vol. 2, no. 1; pp. 69–95.

HŘEBÍČEK, Luděk: "Fractals in Language", *Journal of Quantitative Linguistics*, 1994, vol. 1, n. 1; pp. 82–86.

__________: "Persistence and Other Aspects of Sentence-Length Series", *Journal of Quantitative Linguistics*, 1997, vol. 4, n. 1–3, pp. 103–109.

HSÜ, Kenneth Jinghwa: "Fractal Geometry of Music: From Birdsongs to Bach" in (A.J. Crilly, R.A. Earnshaw, H. Jones, eds.) *Applications of Fractals and Chaos: The Shape of Things*, Berlín, Springer-Verlag, 1993, pp. 21–39.

HSÜ, Kenneth Jinghwa y Andrew J. Hsü: "Fractal geometry of music", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, 1990, vol. 87, n. 3; pp. 938–941.

__________: "Self-Similarity of the "1/*f* Noise" Called Music", *Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA*, 1991, vol. 88, n. 8; pp. 3507–3509.

KNOPOFF, Leon y William Hutchinson: "Information Theory for Musical Continua", *Journal of Music Theory*, 1981, vol. 25, n. 1, pp. 17–44.

KOBLYAKOV, Alexander Alexandrovich: "Semantic Aspects of Self-Similarity in Music", *Symmetry: Culture and Science – Quarterly of the International Society for the Interdisciplinary Study of Symmetry*, 1995, vol. 2, pp. 297–300.

LARGE, Edward W.: "A Dynamical Systems Approach to Musical Tonality" (R. Huys & V.K. Jirsa, eds.), *Nonlinear Dynamics in Human Behavior*, SCI 328, Berlín / Heidelberg, Springer-Verlag, 2010, pp. 193–211.

LARGE, Edward W. y John F. Kolen: "Resonance and the Perception of Musical Meter" en N. Griffith & P.M. Todd, eds., *Musical Networks: Parallel Distributed Perception and Performance*, Cambridge, Mass., The MIT Press, 1999, pp. 65–96.

LERDAHL, Fred y Ray Jackendoff: *A Generative Theory of Tonal Music*, Cambridge, Mass., The MIT Press, 1983.

LORENZ, Edward N.: "Deterministic nonperiodic flow", *Journal of the Atmospheric Sciences* 20, 1963, pp. 130-141

__________: "Predictability: Does the Flap of a Butterfly's Wings in Brazil Set Off a Tornado in Texas?" *American Association for the Advancement of Scicnce*, 139th Meeting, 1972.

MANARIS, Bill, Dallas Vaughan, Christopher Wagner, Juan Romero y Robert B. Davis: "Evolutionary Music and the Zipf-Mandelbrot Law: Developing Fitness Functions for Pleasant Music" en *Lecture Notes in Computer Science, Applications of Evolutionary Computing, LNCS 2611, EvoMUSART2003 – 1st European Workshop on Evolutionary Music and Art*, Essex, UK, Berlín, Springer-Verlag, 2003, pp. 522–534.

MAZZOLA, Guerino: *Geometrie der Töne*, Basilea, Birkhäuser Verlag, 1990.

__________: *The Topos of Music: Geometric Logic of Concepts, Theory, and Performance*, 2 vols, Basilea, Birkhäuser Verlag, 2002.

MILNE, Andrew, William SETHARES & James PLAMONDON (2007). "Isomorphic Controllers and Dynamic Tuning: Invariant Fingering over a Tuning Continuum", *Computer Music Journal*, vol. 31, no. 4; pp. 15–32.

MOLES, Abraham: "The characterization of sound objects by use of the level recorder in musical acoustics", *Acustica: International Journal of Acoustics*, 1954, vol. 4, n. 1, pp. 241–244.

__________: *Théorie de l'information et perception esthétique*, París, Flammarion, 1958.

__________: "Approche informationnelle de la perception et de la creation musicale", *International Review of the Aesthetics and Sociology of Music*, 1986, vol. 17, n. 2; pp. 273–297.

PADILLA, Alfonso: "He planeado, en música, la disciplina y el caos", [conversación con Mauricio Kagel], *Araucaria* (Santiago de Chile), 1984, n. 29, pp. 117–125.

PAREYÓN, Gabriel: *On Musical Self-Similarity: Intersemiosis as Synecdoche and Analogy*, International School of Semiotics, Acta Semiotica Fennica 39 (Approaches to Musical Semiotics; 13), Helsinki / Imatra, 2011.

__________: "A Fractal Conjecture of Language: Proposal for a Cognitive Frame of Linguistics" en (E. Tarasti, ed.) *Communication: Understanding, Misunderstanding. Proceedings of the 9th Congress of the IASS-AIS*, Helsinki / Imatra, 2009a, vol. 3, pp. 1300–1306.

__________: "The Ecologic Foundations of Stylistics in Music and in Language" en (A. Kyriakidou & J. Yannacopoulou, eds.) *Proceedings of the 2nd International Conference for PhD Music Students*, Thessaloniki, Greece, Aristotle University/University of Edinburgh, 2009b, pp. 126–133.

PIERCE, John Robinson: *Symbols, Signals and Noise*, Nueva York, Harper, 1961.

PRESSING, Jeffrey: "Testing Dynamical and Cognitive Models of Rhythmic Pattern Production" en D.J. Glencross & J. P. Piek, eds., *Motor Control and Sensory Motor Integration: Issues and Directions*, Elsevier Science, Amsterdam, 1995, pp. 141–170.

__________: "Referential Behavior Theory" en J. P. Piek, ed. *Motor Behavior and Human Skill: A Multidisciplinary Approach*, Champaign, Illinois, Human Kinetics Publishers, 1998, pp. 357–384.

RASBAND, S. Neil: *The Chaotic Dynamics of Nonlinear Systems*, Wiley Weinheim, VCH, Nueva York, 1990.

RASCH, Rudolf A.: "Farey systems of musical intonation", *Contemporary Music Review*, 1988, vol. 2, n. 2; pp. 31–67.

RIEMANN, Hugo: *The Nature of Harmony*, Theodore Presser, Filadelfia, 1886.

SCHROEDER, Manfred R.: *Fractals, Chaos, Power Laws: Minutes from an Infinite Paradise*, Nueva York, W.H. Freeman, 1991.

SHANNON, Claude E.: "A mathematical theory of communication", *Bell System Technical Journal*, 1948, vol. 27, pp. 379–423 y 623–656.

VAUGHN, Kathryn: "Exploring Emotion in Sub-Structural Aspects of Karelian Lament: Application of Time Series Analysis to Digitized Melody", *Yearbook for Traditional Music*, 1990, vol. 22, pp. 106–122.

VOSS, Richard F. y John Clarke: "1/*f* Noise in Music and Speech", *Nature*, 1975, vol. 258, no. 5533; pp. 317–318.

__________: "1/*f* Noise in Music: Music from 1/*f* Noise", *Journal of Acoustical Society of America*, 1978, vol. 63, n. 1, pp. 258–263.

WICKELGREN, Wayne A.: "Single-trace fragility theory of memory dynamics", *Memory & Cognition*, 1974, vol. 2, n. 4; pp. 775–780.

YADEGARI, Shahrokh David: "Self-Similar Synthesis: On the Border between Sound and Music", tesis de maestría, Cambridge, Mass., MIT, 1992.

ZIPF, George K.: *The Psychobiology of Language*, Boston, Houghton-Mifflin, 1935.

__________: *Human Behavior and the Principle of Least Effort*, Redwood City, California, Addison-Wesley, 1949.