Uncertainty Relations and Diffusion Processes

Paolo Muratore-Ginanneschi

Department of Mathematics and Statistics University of Helsinki

Aalto University, June 26, 2020

UNIVERSITY OF HELSINKI

Outline of the talk

1. A Tale of two ~~Cities~~ Works:
   a forthcoming book and an old paper (or "why I got into this").

2. Uncertainty Relations in Classical Statistical Physics

3. Conclusion

The forthcoming book (Princeton Press 2020)

Stochastic Thermodynamics

A Gentle Introduction

Luca Peliti & Simone Pigolotti

UNIVERSITY OF HELSINKI

The old paper

(Aus dem Physikalischen Institut der deutschen Universität in Prag.)

Über einige Beziehungen zwischen klassischer Statistik und Quantenmechanik.

Von **Reinhold Fürth** in Prag.

Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 19. Januar 1933.)

Im folgenden soll von einigen Beziehungen zwischen der klassischen Statistik — der klassischen Diffusionstheorie und der Theorie der Brownschen Bewegung — einerseits und der Quantenmechanik andererseits die Rede sein, die sich aus formalen Gründen ergeben und, obwohl sie zum Teil manchem bekannt sein dürften, in diesem Zusammenhang meines Wissens noch nicht behandelt worden sind. Insbesondere läßt sich zeigen, daß sich die Heisenbergschen Unschärferelationen auch auf Vorgänge übertragen lassen, die von der klassischen Statistik beherrscht werden, und daß sich dadurch neue Gesichtspunkte zu der oft behandelten Frage nach der Grenze der Meßmöglichkeit mit einem Meßinstrument erbringen

The old paper

L. Peliti & P.M.-G. arXiv:2006.03740

(Aus dem Physikalischen Institut der deutschen Universität in Prag.)

Über einige Beziehungen zwischen klassischer Statistik und Quantenmechanik.

Von **Reinhold Fürth** in Prag.

Mit 4 Abbildungen. (Eingegangen am 19. Januar 1933.)

Im folgenden soll von einigen Beziehungen zwischen der klassischen Statistik — der klassischen Diffusionstheorie und der Theorie der Brownschen Bewegung — einerseits und der Quantenmechanik andererseits die Rede sein, die sich aus formalen Gründen ergeben und, obwohl sie zum Teil manchem bekannt sein dürften, in diesem Zusammenhang meines Wissens noch nicht behandelt worden sind. Insbesondere läßt sich zeigen, daß sich die Heisenbergschen Unschärferelationen auch auf Vorgänge übertragen lassen, die von der klassischen Statistik beherrscht werden, und daß sich dadurch neue Gesichtspunkte zu der oft behandelten Frage nach der Grenze der Meßmöglichkeit mit einem Meßinstrument erbringen

"It was the best of times,
it was the worst of times, ...
it was the season of Light,
it was the season of Darkness"
C. Dickens
"A Tale of two Cities"

UNIVERSITY OF HELSINKI

Fürth's 1933 main results

Fürth proves that

Durch Einführung der Bezeichnungen Δx und Δv in Analogie zu (21) schreiben wir unsere Unschärfebeziehung einfacher in der Gestalt

$$\Delta x \cdot \Delta v \geqq D, \tag{37}$$

die demnach aussagt, daß in einem klassisch diffundierenden Teilchenschwarm die Lagen und die Geschwindigkeiten der Teilchen in jedem Augenblick *gleichzeitig* nicht beliebig genau bestimmt sein können, daß vielmehr das Produkt der beiden Unschärfen stets größer als der Diffusionskoeffizient D sein muß.

Fürth argues that

Änderungsgeschwindigkeit von J sei $\dot{J}$. Es gilt dann

$$J = a x, \qquad \dot{J} = a \cdot \dot{x} = a v,$$
$$\Delta J = a \cdot \Delta x, \quad \Delta \dot{J} = a \Delta v$$

und daher mit Benutzung von (42)

$$\Delta J \cdot \Delta \dot{J} \approx a^2 \cdot D. \tag{43}$$

What does Fürth refer to when he writes Δv ?

$$\Delta x \Delta v \geq D$$

Δx :

mean square root of the position process

D :

Diffusion coefficient

A "modern" derivation

Zeitschrift für Physik, Bd. 132, S. 81—106 (1952).

Eine wahrscheinlichkeitstheoretische Begründung und Interpretation der Quantenmechanik.

Von

IMRE FÉNYES.

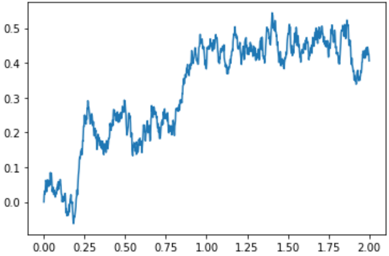
(Eingegangen am 30. Januar 1952.)

Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit sind kurz zusammengefaßt die folgenden: Auch für MARKOFFsche Prozesse bestehen gewisse Unbestimmtheitsrelationen. Auch den MARKOFFschen Prozessen kann eine gewisse Wahrscheinlichkeits-Amplitudenfunktion zugeordnet werden. Die FOKKERsche Gleichung behält ihre Gültigkeit auch in der Quantenmechanik. Die Relation von HEISENBERG ist ein spezieller Fall der Unbestimmtheitsrelation der MARKOFFschen Prozesse. Die wellenmecha-

Continuous Markov Process in $\mathbb{R}^d$

Assumptions on the process $\{\xi_t\}_{t\geq 0}$:

- Independent increments
- Gaussian statistics of the increments: infinitely divisible & Levy stable



First and second order cumulants of the increments specify the dynamics:

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x},t) = \lim_{s\searrow 0} \mathrm{E}\left(\frac{\boldsymbol{\xi}_{t+s}-\boldsymbol{\xi}_t}{s}\middle|\boldsymbol{\xi}_t=\boldsymbol{x}\right) \qquad \text{drift}$$

$$\mathbb{D}(\boldsymbol{x},t) = \lim_{s\searrow 0} \mathrm{E}\left(\frac{(\boldsymbol{\xi}_{t+s}-\boldsymbol{\xi}_t)\otimes(\boldsymbol{\xi}_{t+s}-\boldsymbol{\xi}_t)}{s}\middle|\boldsymbol{\xi}_t=\boldsymbol{x}\right) \qquad \text{diffusion}$$

Kolmogorov's dual picture of the dynamics

Forward evolution of densities ("Schrödinger picture"):

$$\partial_t \mathscr{T}(\boldsymbol{x}, t | \boldsymbol{y}, s) + \partial_{\boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}, t)\mathscr{T}(\boldsymbol{x}, t | \boldsymbol{y}, s) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \partial_{\boldsymbol{x}} \otimes \partial_{\boldsymbol{x}} \mathbb{D}(\boldsymbol{x}, t)\mathscr{T}(\boldsymbol{x}, t | \boldsymbol{y}, s)$$

$$p(\boldsymbol{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}^d y \, \mathscr{T}(\boldsymbol{x}, t | \boldsymbol{y}, s) \, p(\boldsymbol{y}, s) \qquad t \geq s$$

Backward evolution of observables ("Heisenberg picture"):

$$\partial_s \mathscr{T}(\boldsymbol{x}, t | \boldsymbol{y}, s) + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{y}, s) \cdot \partial_{\boldsymbol{y}} \mathscr{T}(\boldsymbol{x}, t | \boldsymbol{y}, s) + \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \mathbb{D}(\boldsymbol{y}, s)\partial_{\boldsymbol{y}} \otimes \partial_{\boldsymbol{y}} \mathscr{T}(\boldsymbol{x}, t | \boldsymbol{y}, s) = 0$$

$$\mathrm{E}\left(f(\boldsymbol{\xi}_t) \middle| \boldsymbol{\xi}_s = \boldsymbol{y}\right) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}^d x \, f(\boldsymbol{x}) \mathscr{T}(\boldsymbol{x}, t | \boldsymbol{y}, s) \qquad t \geq s$$

$$\lim_{|t-s| \to 0} \mathscr{T}(\boldsymbol{x}, t | \boldsymbol{y}, s) = \delta^d(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y})$$

in all cases

UNIVERSITY OF HELSINKI

Time symmetric increments

Time reversal of Markov processes (Kolmogorov 1937)

Given $\mathscr{p}(\boldsymbol{x},t)$ for all $t \in [0,T]$ and $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^d$

$$\mathscr{T}_R(\boldsymbol{y},t|\boldsymbol{x},t+s)\,\mathscr{p}(\boldsymbol{x},t+s) = \mathscr{T}(\boldsymbol{x},t+s|\boldsymbol{y},t)\,\mathscr{p}(\boldsymbol{y},t) \qquad s > 0$$

Current velocity

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) = \lim_{s\searrow 0} \mathrm{E}\left(\frac{\boldsymbol{\xi}_{t+s}-\boldsymbol{\xi}_{t-s}}{2\,s}\middle|\boldsymbol{\xi}_t = \boldsymbol{x}\right) \qquad \text{definition}$$

$$\equiv \lim_{s\searrow 0}\int \mathrm{d}^d y\,\boldsymbol{y}\,\frac{\mathscr{T}(\boldsymbol{y},t+s|\boldsymbol{x},t)-\mathscr{T}_R(\boldsymbol{y},t-s|\boldsymbol{x},t)}{2\,s} \qquad \text{definition rewritten}$$

$$= \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x},t) - \frac{1}{2\,\mathscr{p}(\boldsymbol{x},t)}\partial_{\boldsymbol{x}}\mathbb{D}(\boldsymbol{x},s)\,\mathscr{p}(\boldsymbol{x},t) \qquad \text{calculation}$$

UNIVERSITY OF HELSINKI

Does it matter?

Fokker-Planck becomes mass continuity:

$$0 = \partial_t \wp(\boldsymbol{x},t) + \partial_{\boldsymbol{x}} \cdot \wp(\boldsymbol{x},t) \overbrace{\left(\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x},s) - \frac{1}{2\,\wp(\boldsymbol{x},t)} \partial_{\boldsymbol{x}} \mathbb{D}(\boldsymbol{x},s) \wp(\boldsymbol{x},t) \right)}^{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)}$$

Remark (Fényes 1952): If $\psi(x,t)$ satisfies the Schrödinger equation

$$\wp(\boldsymbol{x},t) = |\psi(x,t)|^2 \qquad \& \qquad \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) = \operatorname{Im} \psi^*(x,t) \boldsymbol{\partial_x} \psi(x,t)$$

Average entropy production of a thermodynamic process:

$$\mathcal{S}_{t_f,t_i} \propto \mathrm{E} \int_{t_i}^{t_f} \mathrm{d}t \, \|\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi}_t,t)\|^2 \geq 0$$

Fürth's first result in "current" language

$$(\Delta\boldsymbol{\xi}_t)^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}^d\boldsymbol{x}\, p(\boldsymbol{x},t)\|\boldsymbol{x} - \mathrm{E}\,\boldsymbol{\xi}_t\|^2$$

$$(\Delta\boldsymbol{v}_t)^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}^d\boldsymbol{x}\, p(\boldsymbol{x},t)\|\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) - \mathrm{E}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi}_t,t)\|^2$$

Cauchy–Schwarz inequality

$$(\Delta\boldsymbol{\xi}_t)^2(\Delta\boldsymbol{v}_t)^2 \geq \left|\mathrm{E}\left(\boldsymbol{\xi}_t\cdot\boldsymbol{b}(\boldsymbol{\xi}_t,t)\right) - (\mathrm{E}\,\boldsymbol{\xi}_t)\cdot\mathrm{E}\,\boldsymbol{b}(\boldsymbol{\xi}_t,t) + \frac{1}{2}\,\mathrm{E}\,\mathrm{Tr}\,\mathbb{D}(\boldsymbol{\xi}_t,t)\right|^2$$

- Heisenberg's type uncertainty when $\mathrm{E}\left(\boldsymbol{\xi}_t\cdot\boldsymbol{b}(\boldsymbol{\xi}_t,t)\right) - (\mathrm{E}\,\boldsymbol{\xi}_t)\cdot\mathrm{E}\,\boldsymbol{b}(\boldsymbol{\xi}_t,t) \geq 0$.
- At equilibrium $\boldsymbol{v} = 0$ by definition.
- In general $(\Delta\boldsymbol{\xi}_t)\ \Delta\boldsymbol{v}(\boldsymbol{\xi}_t,t) \geq 0$

Case of a generic observable

Mean forward derivative

$$D_{+}f(\boldsymbol{x},t) = \lim_{s\searrow 0} \mathrm{E}\left(\frac{f(\boldsymbol{\xi}_{t+s},t+s) - f(\boldsymbol{\xi}_t,t)}{s} \middle| \boldsymbol{\xi}_t = \boldsymbol{x} \right)$$
$$= \left(\partial_t + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x},s)\cdot\partial_{\boldsymbol{x}} + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}\mathbb{D}(\boldsymbol{x},s)\partial_{\boldsymbol{x}} \otimes \partial_{\boldsymbol{x}} \right) f(\boldsymbol{x},t)$$

Time symmetric derivative

$$\bar{D}f(\boldsymbol{x},t) := \lim_{s\searrow 0} \mathrm{E}\left(\frac{f(\boldsymbol{\xi}_{t+s},t+s) - f(\boldsymbol{\xi}_{t-s},t-s)}{2\,s} \middle| \boldsymbol{\xi}_t = \boldsymbol{x} \right) = (\partial_t + \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)\cdot\partial_{\boldsymbol{x}})f(\boldsymbol{x},t)$$

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x},s) - \frac{1}{2\,\wp(\boldsymbol{x},t)}\partial_{\boldsymbol{x}}\Big(\mathbb{D}(\boldsymbol{x},t)\wp(\boldsymbol{x},t)\Big)$$

Fürth's second result in "current" language

$$\left(\Delta f(\boldsymbol{\xi}_t, t)\right)^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}^d \boldsymbol{x}\, \wp(\boldsymbol{x}, t) \left(f(\boldsymbol{x}, t) - \mathrm{E} f(\boldsymbol{\xi}_t, t)\right)^2$$

$$\left(\Delta \bar{D} f(\boldsymbol{\xi}_t, t)\right)^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}^d \boldsymbol{x}\, \wp(\boldsymbol{x}, t) \left(\bar{D} f(\boldsymbol{x}, t) - \mathrm{E}\, \bar{D} f(\boldsymbol{\xi}_t, t)\right)^2$$

Cauchy–Schwarz inequality

$$\left(\Delta f(\boldsymbol{\xi}_t, t)\right)^2 \left(\Delta \bar{D} f(\boldsymbol{\xi}_t, t)\right)^2 \geq \Big| \mathrm{E}\left(f(\boldsymbol{\xi}_t, t) D_+ f(\boldsymbol{\xi}_t, t)\right) - \left(\mathrm{E} f(\boldsymbol{\xi}_t, t)\right) \mathrm{E}\, D_+ f(\boldsymbol{\xi}_t, t) + \frac{1}{2} \mathrm{E}\left((\partial_{\bar{\xi}_t} f \boldsymbol{\xi}_t, t) \cdot \mathbb{D}(\boldsymbol{\xi}_t, t) \cdot \partial_{\bar{\xi}_t} f(\boldsymbol{\xi}_t, t)\right) \Big|^2$$

Heisenberg's type uncertainty when f is a martingale

$D_+ f(\boldsymbol{x}, t) = 0$ (physically: statistical conservation law)

Some final remarks

- Uncertainty relations for diffusion processes: Brownian motion is continuous but nowhere differentiable. Increasing the resolution of the position observation reveals the ill-defined velocity.
- Fürth: more accurate measurements only by decreasing the diffusion coefficient (e.g. low temperature!).
- Fürth: assigning a position probability distribution via a position probability amplitude is a way to "encode information" about velocities (as it appears in Ehrenfest's "theorem").